

## THESIS / THÈSE

### DOCTEUR EN SCIENCES

#### Stabilité des astéroïdes multiples

Compere, Audrey

*Award date:*  
2014

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.







UNIVERSITÉ DE NAMUR

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

# Stabilité des astéroïdes multiples

Thèse présentée par  
**Audrey Compère**  
pour l'obtention du grade  
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Anne LEMAÎTRE (Promoteur)  
Timoteo CARLETTI  
Daniel HESTROFFER  
Bertrand CHAUVINEAU  
André FÜZFA (Président du Jury)

Mars 2014



©Presses universitaires de Namur & Audrey Compère  
Rempart de la Vierge, 13  
B-5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,  
hors des limites restrictives prévues par la loi,  
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,  
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN : 978-2-87037-838-0  
Dépôt légal : D / 2014 / 1881 / 28

Université de Namur  
Faculté des Sciences  
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur (Belgique)

## Stabilité des astéroïdes multiples

par Audrey Compère

**Résumé :** Les systèmes multiples, composés de plusieurs astéroïdes en rotation autour de leur centre de masse commun, sont nombreux dans le système solaire mais encore méconnus. Ils peuvent être très différents les uns des autres, dû à leur situation, à la forme des corps ou encore à leurs rotations. Dans cette thèse, nous réalisons plusieurs études sur le sujet en considérant deux catégories de systèmes multiples : les satellites d'astéroïdes et les astéroïdes doubles. Dans la première partie, nous détectons les résonances gravitationnelles entre un ellipsoïde en rotation constante et une masse ponctuelle. Nous déterminons ensuite les résonances principales entourant le système triple (87) Sylvia et les autres systèmes triples connus. L'évolution de ces systèmes par les effets de marée et de BYORP est analysée par la suite. Dans la seconde partie, nous cherchons à comprendre la raison du petit nombre d'astéroïdes binaires parmi les Plutinos. Enfin, nous montrons l'adéquation du formalisme des tenseurs symétriques sans trace pour l'expression du potentiel d'interaction et nous testons nos résultats sur le système double (66391) 1999 KW<sub>4</sub>.

## Stability of multiple systems

by Audrey Compère

**Abstract :** Multiple systems, composed of several asteroids rotating around their common center of mass, are common in the solar system but misunderstood. These systems can be very different from each other due to their location, the shape of the bodies or their rotations. In this thesis, we carry out several studies on the subject by considering two types of multiple systems : satellites of asteroids and double asteroids. In the first part, we detect gravitational resonances between an ellipsoid in constant rotation and a point mass. Next, we determine the main resonances surrounding the triple system (87) Sylvia and other triple systems known. The evolution of these systems by tidal effects and BYORP is then analyzed. In the second part, we seek to understand the lack of binary asteroids among Plutinos. Finally, we express the interaction potential in the symmetric trace free tensor formalism and we test it on the double system (66391) 1999 KW<sub>4</sub>.

Thèse de doctorat en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)

Date : 05/03/2014

Département de Mathématique

Promoteur (Advisor) : Prof. A. LEMAÎTRE



# Remerciements

La réalisation d'une thèse de doctorat est un travail parfois long et ardu. Elle peut cependant paraître beaucoup plus facile et agréable à réaliser lorsqu'on est bien entouré. Beaucoup de personnes ont contribué à rendre ces 7 années productives et très plaisantes. Je voudrais donc profiter de ces quelques lignes pour les remercier.

La première personne que je tiens à remercier est évidemment Anne Le-maître, mon promoteur. Anne, tu as vraiment été la personne idéale pour l'encadrement de cette thèse, m'orientant quand j'étais un peu perdue, me laissant me débrouiller quand je voulais y arriver par moi-même ou encore me remotivant lorsque mon moral était un peu moins au beau fixe. Tu m'as toujours bien conseillée en me proposant de nouvelles idées ou en me mettant en relation avec de chouettes collaborateurs. Tu m'as aussi soutenue et encouragée dans tous mes projets (l'agrégation, mes grossesses, mes cours en Haute École,...). Vraiment, un grand merci !

Je voudrais remercier les membres de mon comité d'accompagnement, Timoteo Carletti et Daniel Hestroffer, qui m'ont donné de très bons conseils et idées tant lors de mon épreuve de confirmation qu'en dehors. Merci notamment à Daniel de m'avoir proposé de travailler sur les KBBs avec David Farrelly. Je remercie aussi les autres membres de mon jury de thèse, Bertrand Chauvineau et André Füzfa, pour leurs conseils pertinents et leurs remarques constructives lors de la défense privée de ma thèse.

Merci à Nicolas Delsate, Julien Frouard, David Farrelly et Benoît Carry avec qui j'ai collaboré durant cette thèse. Le travail à vos côtés a été vraiment enrichissant. Merci aussi à toute l'équipe de mécanique céleste (Anne-Sophie Libert, Benoît Noyelles, Julien Dufey, Charles Hubaux, Émilie Verheyewegen,...) pour tous leurs conseils et leur aide tout au long de ma thèse.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du département que j'ai côtoyés durant ces 7 années. Je me suis toujours sentie accueillie et bien à ma place parmi vous. Un merci particulier à Jehan qui a dû subir mes bavardages intempestifs dans le bureau (beaucoup n'auraient pas supporté). On a vraiment partagé de bons moments de rire et de complicité, tout en sachant rester sérieux la plupart du temps. Ça a vraiment été un grand plaisir de travailler en face de toi. Merci "aux filles", Anne-Sophie L., Émilie et Charlotte T., avec qui j'ai partagé des heures et des heures de conversation sur les bébés et sur tout le reste. Ces moments de pause ont été essentiels pour moi, surtout ces derniers temps, et vont beaucoup me manquer. Merci à Jojo qui a pris l'habitude, pour mon plus grand bonheur, de passer régulièrement me faire un petit coucou au bureau. Merci aux "vieux" avec qui j'ai partagé de bons moments au début de ma thèse, notamment autour de parties de cartes : Dimitri, Nico, Benoît, Patrick, Mélissa et surtout Charlotte B., ma marraine, qui a toujours veillé à ce que je me sente bien (déjà pendant mes études et ensuite à mon arrivée dans le staff). Merci aux "jeunes" pour la bonne ambiance, en particulier Anne-Sophie C. et Delphine. Votre bonne humeur permanente est un vrai bonheur ! Merci à Pascale et Martine, les secrétaires du département, pour leur disponibilité et leur aide efficace.

Merci aussi à tous les amis qui m'entourent : mes compagnons de route matheux, les "mouth" (Céline et Élodie), les filles du kot,... qui m'ont aidée, par tous ces moments de détente en leur compagnie.

Un tout grand merci à mes parents qui m'ont permis d'être ce que je suis aujourd'hui. Merci de m'avoir donné l'envie et les moyens d'en arriver là et de m'avoir toujours soutenue dans mes choix. Comment ne pas citer également mes frères, mes grand-parents, mes beaux-parents, mes belles-sœurs et beaux-frères et toute ma famille en général qui me permet d'être aussi épanouie.

Enfin, un énorme merci à Stéphane, à Alice et à la petite fille qui grandit sagement dans mon ventre. J'ai beaucoup de chance d'avoir une famille aussi formidable qui me comble autant. Stéphane, merci de m'avoir toujours soutenue et encouragée en y mettant du tien, notamment pour les relectures. Merci pour l'amour et l'attention que tu m'apportes au quotidien.

Merci à tous ceux que je n'ai pas cités ici et qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre à voir cette thèse aboutir. À tous, merci !

Audrey

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
Contexte . . . . .	1
Structure de la thèse . . . . .	2
Contributions . . . . .	3
 <b>I Préliminaires</b>	 <b>5</b>
<b>1 Le potentiel gravitationnel dû à la non-uniformité d'un corps</b>	<b>7</b>
1.1 Les harmoniques sphériques . . . . .	9
1.2 Le potentiel intégral . . . . .	10
1.2.1 Les coordonnées elliptiques . . . . .	10
1.2.2 Le potentiel gravitationnel dû à un ellipsoïde . . . . .	14
1.2.3 Calcul de la force et de la jacobienne . . . . .	14
1.3 Le potentiel développé à l'aide des tenseurs STF . . . . .	15
1.3.1 Définition des tenseurs STF . . . . .	16
1.3.2 Expression du potentiel . . . . .	18
1.3.3 Calcul de la force et de la jacobienne . . . . .	20
1.4 Couplage du potentiel STF . . . . .	21
1.4.1 Potentiel d'interaction dans le formalisme des tenseurs STF	22
1.4.2 Le problème des deux corps rigides . . . . .	25
 <b>2 Outils</b>	 <b>29</b>
2.1 MEGNO . . . . .	29
2.2 NIMASTEP . . . . .	30
2.2.1 Tests du potentiel ellipsoïdal . . . . .	31
2.2.2 Tests de l'intégration de plusieurs satellites . . . . .	31
2.2.3 Tests de l'intégration du problème des deux corps complet	33
2.3 Ordre de grandeur des forces à considérer . . . . .	33
2.4 Modèles de forme et harmoniques sphériques . . . . .	34

2.5	Résonances . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Les satellites d'astéroïdes</b>	<b>39</b>
<b>3</b>	<b>Stabilité d'un petit corps en rotation autour d'un astéroïde ellipsoïdal</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Sélection des cas étudiés . . . . .	42
3.3	Simulations . . . . .	45
3.4	Un modèle simplifié pour le potentiel . . . . .	48
3.5	La résonance 1 : 1 . . . . .	51
3.5.1	Le cas équatorial circulaire . . . . .	53
3.5.2	Le cas circulaire . . . . .	57
3.5.3	Le cas équatorial . . . . .	59
3.6	La résonance 2 : 1 . . . . .	62
3.6.1	Équilibres de la résonance 2 : 1 . . . . .	62
3.6.2	Le cas tronqué équatorial . . . . .	63
3.7	Conclusion . . . . .	65
<b>4</b>	<b>Dynamique des astéroïdes triples : l'exemple du système (87) Sylvia</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Étude du système (87) Sylvia . . . . .	71
4.2.1	Intégrations numériques des courtes périodes . . . . .	72
4.2.2	Intégrations numériques des longues périodes . . . . .	77
4.3	Généralisation à d'autres systèmes . . . . .	80
4.3.1	Les résonances en moyen mouvement . . . . .	80
4.3.2	La résonance d'évection . . . . .	81
4.4	Conclusion . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Phénomènes de dissipation pour les satellites d'astéroïdes</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Les effets de marées . . . . .	86
5.3	L'effet BYORP . . . . .	88
5.4	Dissipation du système Sylvia . . . . .	89
5.4.1	L'évolution expansive conjointe . . . . .	89
5.4.2	L'évolution opposée conjointe . . . . .	91
5.5	Zones génériques d'instabilité des systèmes triples . . . . .	92
5.5.1	L'évolution expansive conjointe . . . . .	94
5.5.2	L'évolution opposée conjointe . . . . .	95
5.5.3	Les échelles de temps . . . . .	95
5.5.4	L'évolution opposée conjointe avec un paramètre BYORP différent pour chaque satellite . . . . .	96
5.5.5	La résonance d'évection . . . . .	97

5.6 Conclusion . . . . .	98
--------------------------	----

### III Les astéroïdes doubles 101

#### 6 Formation d'astéroïdes binaires dans la ceinture de Kuiper 103

6.1 Introduction . . . . .	103
6.2 Méthodes numériques et indicateurs de chaos . . . . .	107
6.3 Le problème de Hill perturbé . . . . .	108
6.3.1 Modèle . . . . .	108
6.3.2 Conditions initiales . . . . .	110
6.3.3 Cartes de MEGNO avec le problème de Hill perturbé . . . . .	111
6.3.4 Temps de résidence avec le problème de Hill perturbé . . . . .	112
6.4 Le problème des 2+2 corps plan circulaire . . . . .	114
6.4.1 Modèle . . . . .	115
6.4.2 Conditions initiales . . . . .	115
6.4.3 Cartes de MEGNO avec le problème des 2+2 corps plan circulaire . . . . .	117
6.4.4 Temps de résidence avec le problème des 2+2 corps plan et circulaire . . . . .	119
6.5 Le problème des 2+2 corps plan excentrique . . . . .	122
6.5.1 Cartes de MEGNO dans le cas plan excentrique . . . . .	122
6.5.2 Temps de résidence dans le cas plan excentrique . . . . .	125
6.6 Le problème des 2+2 corps non-plan excentrique . . . . .	127
6.7 Conclusion . . . . .	128

#### 7 Le potentiel d'interaction dans le formalisme des tenseurs STF : application aux astéroïdes doubles 131

7.1 Introduction . . . . .	131
7.2 Modèle et conditions initiales . . . . .	132
7.3 Résultats . . . . .	134
7.4 Comparaison avec l'article de Fahnestock et Scheeres (2008) . . . . .	135
7.5 Conclusion . . . . .	139

#### Conclusions et perspectives 141

#### A Force et matrice jacobienne du potentiel intégral 145

#### B Tenseurs STF 149

B.1 Rotation des coefficients $M_{l,m}$ . . . . .	149
B.2 Dérivées partielles . . . . .	150

#### C Fonctions perturbatrices moyennisées 153

#### Bibliographie 157





# Introduction

## Contexte

Grâce aux techniques d'observation de plus en plus sophistiquées et aux programmes systématiques de détection, la population des astéroïdes et des petites planètes est de mieux en mieux connue. Une des découvertes associées à ces études est le grand nombre d'astéroïdes multiples observés dans le système solaire. Un astéroïde multiple, ou système astéroïdal, est un ensemble d'au moins deux astéroïdes gravitant autour de leur centre de masse commun. Nous parlons d'*astéroïde binaire* pour un système de deux astéroïdes et d'*astéroïde triple* lorsqu'ils sont trois. On retrouve ces systèmes dans toutes les populations d'astéroïdes, par exemple parmi les transneptuniens, les Troyens ou encore parmi les croiseurs de la Terre.

En 1993 déjà, la sonde automatisée Galileo qui explorait le système jovien avait photographié l'astéroïde Ida et avait révélé la présence d'une petite lune, mesurant environ 1.5 km de diamètre, alors qu'Ida, en forme de patate, mesure environ 58 km de long pour 22 km de large. Dactyl est la première lune jamais découverte autour d'un astéroïde (Belton *et al.* 1996).

D'autres découvertes ont confirmé que les systèmes binaires n'étaient pas les seuls systèmes multiples existants. L'astéroïde (87) Sylvia par exemple (un des plus gros de la ceinture principale, déjà identifié en 2001 comme un binaire) s'est avéré avoir son propre "mini système planétaire" avec deux astéroïdes évoluant autour de lui. Il s'agit du premier astéroïde triple découvert (Marchis *et al.*, 2005b).

À ce jour, 241 systèmes multiples sont connus (d'après la base de données en ligne *Asteroids/TNOs with Satellites : Summary Data* de Wm. Robert Johnston<sup>1</sup>) mais de nouveaux systèmes sont découverts fréquemment. Le nombre de

---

1. Accessible à l'adresse <http://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidmoons.html>.

binaires pourrait d'ailleurs représenter une fraction de 15% de la population des géocroiseurs (Margot *et al.* 2002 ; Pravec *et al.* 2006). Les systèmes triples sont rares et seulement neuf de ces systèmes sont connus aujourd'hui dans tout le système solaire. On ne connaît à ce jour aucun système quadruple et qu'un seul système quintuple : Pluton-Charon et leurs satellites.

Depuis leur découverte, c'est la stabilité de tels systèmes qui intrigue les scientifiques. On les retrouve pourtant partout, malgré des zones de perturbations bien différentes. Beaucoup ont des orbites circulaires et équatoriales, mais d'autres orbites sont franchement excentriques et inclinées. Les astéroïdes ont souvent des formes très irrégulières qui influencent grandement la dynamique des systèmes multiples<sup>2</sup>. Un accent particulier sera mis sur ce facteur de perturbation dans cette thèse.

L'évolution et les mécanismes de formation de ces systèmes dépendent aussi du rapport des masses entre le corps primaire (le corps le plus massif du système) et les corps secondaires. Si ce rapport est très petit, comme c'est le cas du binaire (243) Ida, le système est similaire au problème dynamique classique d'un satellite de petite masse orbitant autour d'un corps massif non sphérique. Nous parlerons alors de *satellites d'astéroïde*. Si par contre les astéroïdes composant le système sont de tailles similaires, comme le cas de l'astéroïde géocroiseur (66391) 1999 KW<sub>4</sub>, alors la forme et la rotation de tous les corps doivent être pris en compte. Pour un système binaire, cela revient à étudier un problème des deux corps rigides complet (voir par exemple Maciejewski (1995)). Nous nommons ces astéroïdes des *astéroïdes doubles*.

En plus de l'étude dynamique de ces systèmes, nous pouvons aussi étudier les effets dissipatifs qui agissent sur ces systèmes, comme les effets de marée (Mathis et Le Poncin-Lafitte 2009 ; Goldreich et Sari 2009 ; Taylor et Margot 2010, 2011) et l'effet BYORP (Ćuk et Burns 2005 ; Ćuk et Nesvorný 2010 ; McMahon et Scheeres 2010 ; Steinberg et Sari 2011). Ces effets, décrits dans le chapitre 4, permettent d'étudier plus en détail l'évolution des systèmes multiples sur de longues périodes de temps.

## Structure de la thèse

La thèse est divisée en trois parties : la première fournit les préliminaires, la deuxième est consacrée à l'étude des satellites d'astéroïdes et la troisième aux astéroïdes doubles.

---

Une autre base de données en ligne peut être consultée à l'adresse <http://www.asu.cas.cz/~asteroid/binastdata.htm> et est décrite par Pravec et Harris (2007) et Pravec *et al.* (2012).

2. Les axes de rotation des astéroïdes sont cependant souvent méconnus.

Dans la première partie, un chapitre présente différentes formulations de la force exercée sur un point par un corps non sphérique ainsi que la force de couplage qu'exercent l'un sur l'autre des corps non sphériques de masses similaires. Le deuxième chapitre donne quelques détails sur des outils et notions que nous utiliserons dans la suite.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons d'abord au cas d'un seul satellite (chapitre 3). En approximant le corps central par un ellipsoïde, nous mettons en évidence les résonances gravitationnelles qui peuvent stabiliser ce genre de système. Dans un deuxième temps, nous analysons les astéroïdes triples constitués d'un corps primaire et de deux satellites (chapitre 4). Pour commencer, nous identifions les principales résonances gravitationnelles, en moyen mouvement et séculaires entourant le système (87) Sylvia. Nous généralisons ensuite cette étude à d'autres astéroïdes multiples du système solaire. Enfin, nous étudions l'évolution du système Sylvia et des autres systèmes triples par des effets dissipatifs (chapitre 5). Nous prenons en compte les phénomènes de marées et BYORP qui sont les plus pertinents pour les astéroïdes multiples.

La dernière partie, consacrée aux astéroïdes doubles, comporte deux chapitres. Dans le premier, nous approximons les deux astéroïdes par des sphères et nous essayons de comprendre un phénomène très particulier observé parmi la population des astéroïdes doubles : le manque de binaires dans la résonance en moyen mouvement 3 : 2 avec Neptune (chapitre 6). Nous faisons ensuite une étude plus poussée des astéroïdes doubles en prenant en compte la forme et la rotation de chacun des corps (chapitre 7). Nous appliquons les équations générales du problème des deux corps complet à l'astéroïde double (66391) 1999 KW<sub>4</sub>.

Puisque nous allons étudier des systèmes très différents, ayant chacun leurs propres perturbations (rapport des masses, forme des corps, dissipation,...), nous présenterons brièvement les recherches effectuées précédemment sur ces sujets au début de chaque chapitre plutôt que dans cette introduction.

## Contributions

Les résultats présentés dans cette thèse ont fait l'objet de 5 publications dans des journaux à comité de lecture (4 articles publiés et 1 soumis) :

1. A. Compère, A. Lemaître, N. Delsate, *Detection by MEGNO of the gravitational resonances between a rotating ellipsoid and a point mass satellite*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Volume 112, Issue 1, pp.75-98, 2012.

2. N. Delsate, A. Compère, *NIMASTEP : a software to modelize, study, and analyze the dynamics of various small objects orbiting specific bodies*, Astronomy & Astrophysics, Volume 540, id.A120, 12 pp., 2012.
3. J. Frouard, A. Compère, *Instability zones for satellites of asteroids : The example of the (87) Sylvia system*, Icarus, Volume 220, Issue 1, p. 149-161., 2012.
4. A. Compère, D. Farrelly, A. Lemaître, D. Hestroffer, *A possible mechanism to explain the lack of binary asteroids among the Plutinos*, Astronomy & Astrophysics, Volume 558, id.A4, 9 pp., 2013.
5. A. Compère, A. Lemaître, *The two-body interaction potential in the STF tensor formalism : an application to binary asteroids*, article soumis à la Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy special issue en 2013.

Les articles 1 et 3 traitent de satellites d'astéroïdes et sont détaillés dans la partie 2 de cette thèse (chapitres 3 à 5). Les articles 4 et 5 sont consacrés aux astéroïdes doubles et leurs résultats sont décrits dans la partie 3 (chapitres 6 et 7). Enfin, l'article 2 présente un logiciel utilisé tout au long de cette thèse et introduit brièvement dans le chapitre 2.

Première partie

Préliminaires



# Chapitre 1

## Le potentiel gravitationnel dû à la non-uniformité d'un corps

Les astéroïdes ont en général des formes très irrégulières. Il est donc important de considérer cette non-sphéricité dans les équations du mouvement que nous utilisons pour étudier les systèmes d'astéroïdes. Bien évidemment, il n'existe pas qu'une seule façon de prendre en compte cet effet. Les outils utilisés sont nombreux et un astéroïde peut être modélisé de toutes sortes de façons. Par exemple, il peut être approximé par un géoïde (comme pour la Terre), par un ellipsoïde, par un polyèdre régulier ou même par des segments de droites en rotation (voir par exemple Duboshin (1959), Elife et Lara (2006) et Bartczak et Breiter (2003)). Dans ce chapitre, nous présentons les formulations du potentiel gravitationnel que nous allons utiliser dans la suite de ce manuscrit. D'autres formulations dont nous ne parlerons pas ici auraient aussi pu être utilisées comme les harmoniques ellipsoïdales (voir Mac Millan (1958); Garmier *et al.* (2001)), le potentiel polyhédral de Werner (1994) ou encore le formalisme de Boué et Laskar (2009). Une comparaison de différents modèles est présentée dans Rossi *et al.* (1999).

Selon la loi de gravitation universelle de Newton, la force d'attraction entre deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$  s'écrit :

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r},$$

où  $G$  est la constante gravitationnelle,  $\vec{r}$  est le vecteur joignant les deux corps et  $r$  est la norme de ce vecteur. Nous allons considérer deux cas : soit un corps est beaucoup plus massif que l'autre, soit les deux corps ont des masses du même ordre de grandeur.



Lorsqu'on suppose que l'un des deux corps est beaucoup plus massif que l'autre, on considère en première approximation que le corps le plus massif (de masse  $M$ ) est sphérique et de densité uniforme. Le deuxième corps est considéré comme une particule de masse négligeable par rapport à  $M$ . En centrant le repère sur le corps massif, la force s'écrit alors :

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}.$$

Cette force correspond à l'opposé du gradient du potentiel scalaire

$$U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}. \quad (1.1)$$

Cependant, si le corps central n'est pas une sphère ou n'est pas de densité uniforme, le potentiel est généralisé en considérant la somme des contributions de chaque élément de masse constituant le corps :

$$U(\vec{r}) = -G \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\Delta V} \frac{\rho(\vec{r}_p)\Delta V}{\|\vec{r} - \vec{r}_p\|}.$$

où  $V$  est le volume du corps central,  $\vec{r}_p$  (de norme  $r_p$ ) est la position de l'élément de volume  $\Delta V$  par rapport au centre de masse du corps central et  $\rho(\vec{r}_p)$  est la densité de masse au point  $\vec{r}_p$ . On l'écrit aussi (Montenbruck et Eberhard, 2000) :

$$U(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}_p)}{\|\vec{r} - \vec{r}_p\|} dV, \quad (1.2)$$

avec  $dV$  un élément de volume infinitésimal.

Cette intégrale est approximée de plusieurs façons. Nous en présentons trois : les harmoniques sphériques (section 1.1), le potentiel intégral (section 1.2) et le potentiel dans le formalisme des tenseurs symétriques sans trace (section 1.3).

Lorsque les deux corps sont de masses équivalentes, les hypothèses changent. Considérons que les deux corps ne sont pas des sphères ou ne sont pas de densité de masse uniforme. Le potentiel d'interaction gravitationnelle mutuelle de deux corps  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  s'écrit alors, selon Hartmann *et al.* (1994) :

$$U_{12} = \iiint_{M_1} U^{\mathcal{B}_2}(\vec{r}_{12}) dM_1, \quad (1.3)$$

où  $\vec{r}_{12}$  est le vecteur joignant  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ ,  $M_1$  est la masse du corps  $\mathcal{B}_1$ ,  $dM_1$  est un élément de masse infinitésimal et le potentiel  $U^{\mathcal{B}_2}$  est le potentiel (1.2) agissant sur le corps  $\mathcal{B}_2$ .

Dans ce chapitre, nous développerons le potentiel (1.3) à l'aide des tenseurs symétriques sans trace (section 1.4).

## 1.1 Les harmoniques sphériques

La façon la plus classique d'approximer le potentiel (1.2) est d'utiliser les harmoniques sphériques. Nous résumons ici cette construction.

On développe, dans un premier temps, le terme  $\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_p\|}$  de l'équation (1.2) en série :

$$\frac{1}{\|\vec{r}-\vec{r}_p\|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_p}{r}\right)^n \mathcal{P}_n(\cos \psi), \quad (1.4)$$

où  $r_p/r$  est l'argument du développement en série,  $\psi$  est l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_p$  et  $\mathcal{P}_n$  sont les polynômes de Legendre de degré  $n$  :

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}.$$

Ensuite, en utilisant les coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \phi)$  de  $\vec{r}$  (avec  $\lambda$  la longitude et  $\phi$  la latitude), ainsi que  $(r_p, \lambda_p, \phi_p)$  pour  $\vec{r}_p$ , les polynômes de Legendre peuvent être développés en harmoniques sphériques (Kaula, 1966; Montenbruck et Eberhard, 2000) :

$$\mathcal{P}_n(\cos \psi) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \mathcal{P}_{nm}(\sin \phi) \mathcal{P}_{nm}(\sin \phi_p) \cos(m(\lambda - \lambda_p)),$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\mathcal{P}_{nm}$  sont les fonctions de Legendre associées, de degré  $n$  et d'ordre  $m$ , qui sont définies par :

$$\mathcal{P}_{nm}(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} \{\mathcal{P}_n(x)\}.$$

Le potentiel gravitationnel d'un corps non-sphérique en un point  $(r, \lambda, \phi)$  s'écrit alors (Kaula, 1966; Montenbruck et Eberhard, 2000) :

$$U(r, \lambda, \phi) = -\frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_0}{r}\right)^n \mathcal{P}_{nm}(\sin \phi) \left[ C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} \sin(m\lambda) \right], \quad (1.5)$$

où  $R_0$  est le rayon équatorial du corps et  $C_{n,m}$  et  $S_{n,m}$  sont les coefficients (adimensionnels) des harmoniques sphériques donnés par :

$$C_{n,m} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \left(\frac{r_p}{R_0}\right)^n \mathcal{P}_{nm}(\sin \phi_p) \cos(m\lambda_p) \rho(\vec{r}_p) dV,$$

$$S_{n,m} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_V \left(\frac{r_p}{R_0}\right)^n \mathcal{P}_{nm}(\sin \phi_p) \sin(m\lambda_p) \rho(\vec{r}_p) dV.$$

Le coefficient  $C_{0,0}$  est égal à 1 et les  $S_{n,0}$  sont nuls par définition. Le premier terme du potentiel (1.5) correspond donc au potentiel des deux corps (1.1). De plus, les coefficients  $C_{1,0}$ ,  $C_{1,1}$  et  $S_{1,1}$  sont nuls lorsque le repère de référence est

placé au centre de masse du corps central (ce qui sera toujours le cas ici). Enfin, les coefficients  $C_{2,1}$  et  $S_{2,1}$  sont nuls lorsque l'axe  $z$  du repère de référence est aligné avec l'axe principal d'inertie du corps central.

Le potentiel (1.5) d'un corps non-sphérique sur une masse ponctuelle extérieure peut donc s'écrire :

$$U(r, \lambda, \phi) = -\frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_0}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda) \right]. \quad (1.6)$$

La figure 1.1 illustre l'effet des premiers coefficients non nuls des harmoniques sphériques. Les coefficients  $J_{n,m}$  correspondent à  $\sqrt{C_{n,m}^2 + S_{n,m}^2}$  pour  $n \geq m > 0$  et  $J_n = J_{n,0}$ . Par exemple, le coefficient  $J_2 = |C_{2,0}|$  correspond à l'aplatissement du corps tandis que le coefficient  $J_{2,2}$  est associé à la forme elliptique de l'équateur du corps.

On utilisera aussi, dans certains chapitres, les coefficients normalisés :

$$\begin{pmatrix} \overline{C}_{n,m} \\ \overline{S}_{n,m} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}} \begin{pmatrix} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Le calcul de la force gravitationnelle découlant du potentiel (1.6) peut se faire de deux façons (à notre connaissance) : de façon directe (en dérivant le potentiel) ou en utilisant la méthode de Cunningham (1970) qui est un algorithme complexe mais facile à intégrer numériquement. C'est cette stratégie qui sera adoptée ici (pour plus de détails, voir Cunningham (1970); Montenbruck et Eberhard (2000)).

## 1.2 Le potentiel intégral

Nous modélisons ensuite le corps central par un ellipsoïde de densité de masse uniforme. Afin d'écrire le potentiel intégral, nous utilisons les coordonnées elliptiques.

### 1.2.1 Les coordonnées elliptiques

Exprimons les coordonnées d'un point  $(x, y, z)$  à l'extérieur d'un corps non-sphérique avec une autre logique (tirée de Garmier *et al.* (2001)).

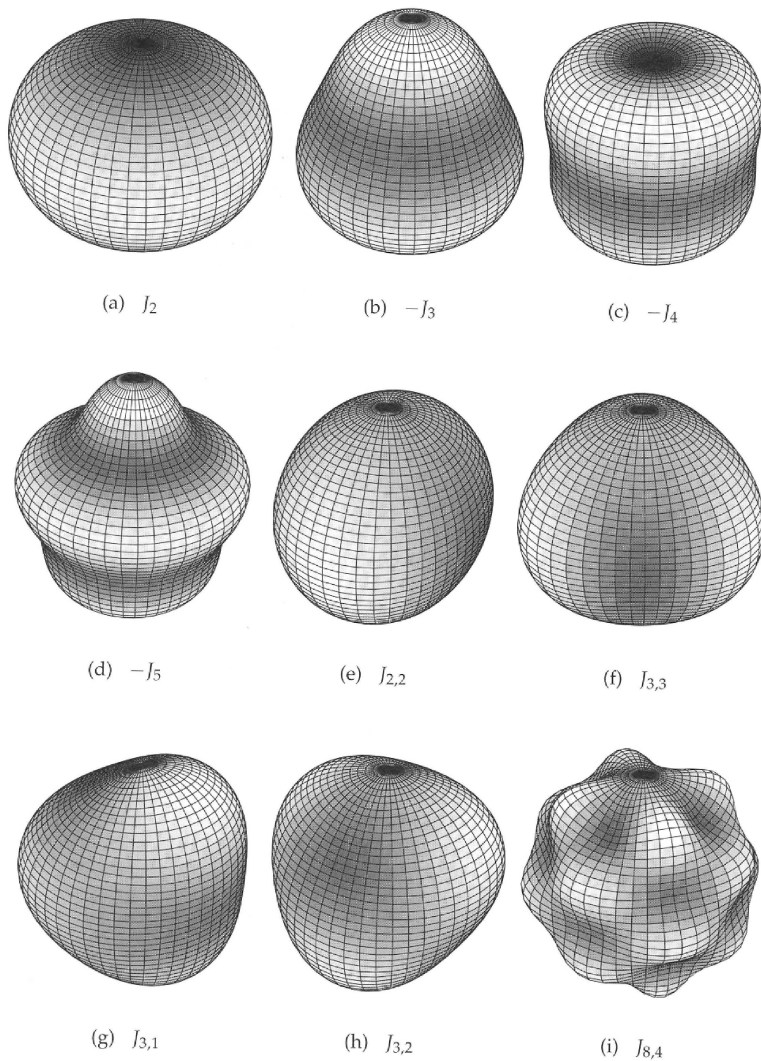


FIGURE 1.1 – Illustration des harmoniques sphériques  $J_{n,m}$  du géopotentiel pour les premiers degrés et ordres. Les régions claires indiquent des accumulations de masse tandis que les régions foncées indiquent des carences en masse. Figure tirée de Klinkrad (2006).

Soit  $\Gamma_0$  le plus petit ellipsoïde contenant le corps et centré au centre de masse de celui-ci. Nous appellerons cet ellipsoïde *l'ellipsoïde de référence*. Celui-ci s'écrit :

$$\Gamma_0 := \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{avec } d \geq b \geq c,$$

où nous utilisons la notation  $d$  à la place de  $a$  pour réserver  $a$  au demi-grand axe.

Afin de ne travailler qu'avec deux degrés de liberté et pas trois (les trois demi-axes de  $\Gamma_0$ ), nous allons utiliser les longueurs focales qui sont (Garmier *et al.*, 2001) :

$$\begin{aligned} h^2 &= d^2 - b^2, \\ k^2 &= d^2 - c^2, \end{aligned} \tag{1.8}$$

où  $h^2 \leq k^2$  puisque  $d \geq b \geq c$ . On peut alors réécrire  $\Gamma_0$  comme ceci :

$$\Gamma_0 := \frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{d^2 - h^2} + \frac{z^2}{d^2 - k^2} = 1.$$

À un point  $(x, y, z)$  on associe l'équation :

$$\frac{x^2}{s^2} + \frac{y^2}{s^2 - h^2} + \frac{z^2}{s^2 - k^2} = 1 \tag{1.9}$$

où  $s$  est inconnue.

L'équation (1.9) est une équation d'ordre 3 en  $s^2$ . Elle possède 3 racines réelles positives  $\lambda_1^2$ ,  $\lambda_2^2$  et  $\lambda_3^2$  qui sont telles que  $0 \leq \lambda_3^2 \leq h^2 \leq \lambda_2^2 \leq k^2 \leq \lambda_1^2$ . Ceci signifie que  $(x, y, z)$  est à l'intersection de (voir figure 1.2) :

- un ellipsoïde de demi-axes  $(\sqrt{\lambda_1^2}, \sqrt{\lambda_1^2 - h^2}, \sqrt{\lambda_1^2 - k^2})$  (d'équation  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$  avec  $A, B$  et  $C$  des constantes),
- un hyperboloïde à une nappe de demi-axes  $(\sqrt{\lambda_2^2}, \sqrt{\lambda_2^2 - h^2}, \sqrt{k^2 - \lambda_2^2})$  (d'équation  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1$  avec  $A, B$  et  $C$  des constantes),
- un hyperboloïde à deux nappes de demi-axes  $(\sqrt{\lambda_3^2}, \sqrt{h^2 - \lambda_3^2}, \sqrt{k^2 - \lambda_3^2})$  (d'équation  $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = -1$  avec  $A, B$  et  $C$  des constantes).

Donc, à un point de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , on peut associer les coordonnées elliptiques  $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$  (Garmier *et al.*, 2001).

Remarquons que les coordonnées  $(x, y, z)$  correspondent à un seul triplet de coordonnées  $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$ , alors que les coordonnées  $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$  correspondent à 8 coordonnées  $(x, y, z)$  différentes (comme illustré à la figure 1.2). Puisque le changement de coordonnées n'est pas inversible, on travaille sur une carte locale.

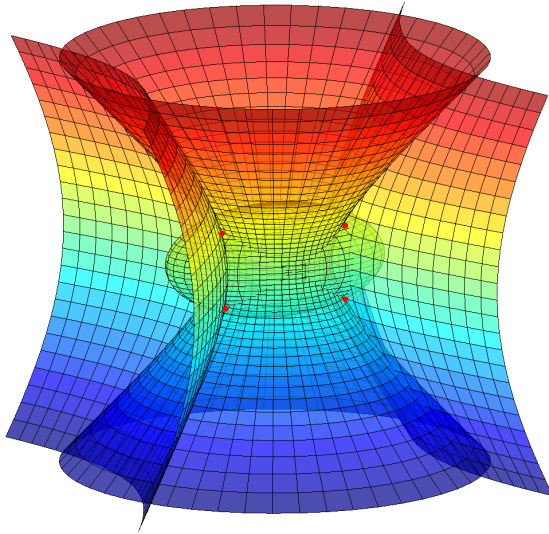


FIGURE 1.2 – Intersections de l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde à une nappe et de l'hyperboloïde à deux nappes correspondant à des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . On ne voit ici que 4 intersections, les 4 autres se trouvant à l'arrière de la figure.

Afin de calculer  $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$  numériquement, nous adoptons la stratégie de Garmier *et al.* (2001) : nous calculons les  $\lambda_i^2$  par les formules analytiques suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = 2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, \\ \lambda_2^2 = 2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, \\ \lambda_3^2 = 2\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a_1^2 - 3a_2}{9}, \quad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}, \\ \cos(\theta) &= \frac{R}{\sqrt{Q^3}}, \\ a_1 &= -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + h^2 + k^2), \\ a_2 &= x_1^2(h^2 + k^2) + x_2^2k^2 + x_3^2h^2 + h^2k^2, \\ a_3 &= -x_1^2h^2k^2. \end{aligned}$$

Cependant, ces formules sont numériquement instables (le problème est mal conditionné). Nous sélectionnons alors la plus petite valeur entre  $\lambda_i^2$ ,  $|\lambda_i^2 - h^2|$  et  $|\lambda_i^2 - k^2|$ , et nous transformons l'équation cubique (1.9) afin que cette quantité soit la nouvelle racine. Ceci nous permet d'éviter les petits diviseurs dans l'équation (1.9) (lorsque par exemple  $x_3 \rightarrow 0$ , alors  $\lambda_2^2 \rightarrow k^2$ , et donc on retrouve  $\lambda_2^2 - k^2 = \epsilon$  en dénominateur, avec  $\epsilon$  un petit paramètre). Nous résolvons alors la nouvelle équation par la méthode de la sécante et nous calculons  $\lambda_i^2$ ,  $|\lambda_i^2 - h^2|$  et  $|\lambda_i^2 - k^2|$ .

### 1.2.2 Le potentiel gravitationnel dû à un ellipsoïde

Le potentiel gravitationnel dû à un ellipsoïde sur une masse ponctuelle peut s'écrire de deux façons. La façon classique, expliquée dans Mac Millan (1958), mais déjà apparue dans Ivory (1809), est :

$$V(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3\mu}{4} \int_{u^*}^{+\infty} Q(x_1, x_2, x_3, d, b, c, u) du, \quad (1.10)$$

$$Q = \left(1 - \frac{x_1^2}{d^2 + u} - \frac{x_2^2}{b^2 + u} - \frac{x_3^2}{c^2 + u}\right) / \sqrt{(d^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)},$$

où  $\mu = GM$  avec  $G$  la constante gravitationnelle et  $M$  la masse de l'astéroïde,  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  sont les coordonnées de la masse ponctuelle et  $u^*$  est la solution positive de l'équation  $Q = 0$ . Ce potentiel a déjà été utilisé (dans le même contexte) par Rossi *et al.* (1999), Scheeres (1994) et Bartczak *et al.* (2006).

La deuxième façon d'écrire ce potentiel, en utilisant les variables  $h^2 = d^2 - b^2$  et  $k^2 = d^2 - c^2$ , est présentée dans Garmier *et al.* (2001) :

$$V(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3\mu}{2} \int_{\lambda_1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}\right) \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - h^2)(s^2 - k^2)}}, \quad (1.11)$$

où  $\lambda_1$  est la première coordonnée elliptique du point  $(x_1, x_2, x_3)$ . Nous retrouvons  $V = -\mu/r$  lorsque  $h = k = 0$ , comme attendu.

L'avantage de cette formulation du potentiel est que l'ellipsoïde est modélisé par deux quantités  $h$  et  $k$  qui s'annulent lorsque l'ellipsoïde est une sphère. Donc la valeur de ces quantités nous donne une évaluation de la non-sphéricité de l'astéroïde. Pour cette raison, nous utiliserons (1.11) et pas (1.10).

### 1.2.3 Calcul de la force et de la jacobienne

Nous utilisons, dans les intégrations numériques, la force induite par ce potentiel, donnée par les dérivées partielles de  $V$ . Comme  $\lambda_1$  dépend de  $x_1$ , de  $x_2$  et de  $x_3$ , il faut en tenir compte dans les dérivées partielles. Après quelques

dérivées et changements de variables (décrits dans l'annexe A), les composantes de la force s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= -\frac{3}{2} \frac{x_1 GM}{\lambda_1} \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{1/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_2} &= -6 x_2 GM \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{3/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_3} &= -6 x_3 GM \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{1/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ces intégrales sont calculées par une quadrature de Gauss-Legendre. Cette quadrature est une approximation de la valeur numérique d'une intégrale dont les bornes sont -1 et 1. Pour une fonction  $f$  quelconque, on écrit :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i),$$

où  $n$  est le degré de l'approximation, les  $w_i$  sont les poids et les  $x_i$  sont les abscisses de la quadrature. Le degré est choisi en fonction de la précision souhaitée, les abscisses pour une quadrature d'ordre  $n$  sont les racines des polynômes de Legendre  $\mathcal{P}_n(x)$  et les poids sont calculés par :

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{(n+1)^2 [P_{n+1}(x_i)]^2}.$$

Cette quadrature est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré  $2n-1$  si on prend  $n$  comme degré. Elle fonctionne aussi très bien pour les fonctions monotones (ce qui est le cas ici).

Remarquons que, dans le cas où l'ellipsoïde est une sphère, alors  $k = h = 0$ ,  $\lambda_1 = R$  (le rayon de la sphère) et donc les composantes de la force (1.12) deviennent  $F_{x_i} = -3x_i GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} 1/s^4 ds = -x_i GM/\lambda_1^3$  avec  $i = 1, 2, 3$ .

Afin d'utiliser dans la suite un indicateur de chaos, nous évaluons également la matrice jacobienne du potentiel (1.11). Celle-ci est donnée dans l'annexe A.

## 1.3 Le potentiel développé à l'aide des tenseurs STF

Nous exprimons, dans cette section, la force due au potentiel d'un corps développé en harmoniques sphériques grâce aux tenseurs symétriques sans trace



(notés tenseurs STF dans la suite pour "Symetric Trace Free"). Les tenseurs STF ont été développés par Hartmann *et al.* (1994), et utilisés par Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009) pour les étoiles binaires et les systèmes planétaires. Par contre, cet outil n'a jamais (à notre connaissance) été appliqué aux astéroïdes binaires. Ce formalisme est équivalent au développement en harmoniques sphériques. Son avantage est qu'un ensemble particulier de tenseurs STF représente une base irréductible du groupe de rotation  $SO(3)$ <sup>1</sup>. Les propriétés qui en découlent permettent de déterminer le couplage entre les harmoniques sphériques d'une façon élégante et compacte, ce que nous montrerons dans la section suivante. Il permet aussi d'exprimer facilement le potentiel de marée ainsi que les fonctions de perturbation associées pour les systèmes de corps étendus. Il est donc particulièrement adapté pour traiter les effets dissipatifs. Nous reparlerons de ceci dans le dernier chapitre de la thèse.

### 1.3.1 Définition des tenseurs STF

Définissons un tenseur symétrique sans trace (STF) comme décrit dans Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009). Soit un tenseur cartésien d'ordre  $l$ ,  $\mathcal{A}_L = \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_l}$ , avec  $i_j \in \{1, 2, 3\}$ , sa partie symétrique est :

$$S_L = \mathcal{A}_{(L)} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma} \mathcal{A}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(l)}}$$

où  $\sigma$  parcourt les  $l!$  permutations de  $\{1, 2, 3, \dots, l\}$ .

Selon Thorne (1980) et Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009), sa partie symétrique sans trace est :

$$\hat{\mathcal{A}}_L = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} a^{k,l} \delta_{(i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}} S_{i_{2k+1} \dots i_l) a_1 a_1 \dots a_k a_k}$$

où le produit  $a_1 a_1 \dots a_k a_k$  donne le nombre de paires à considérer et les parenthèses signifient qu'on somme sur toutes les permutations des indices présents des  $\delta$  et des  $S$ . Par exemple :

$$\delta_{(i_1 i_2 i_3) a_1 a_1} = \delta_{ab} \sum_{j=1}^3 S_{jjc} + \delta_{ac} \sum_{j=1}^3 S_{jbj} + \delta_{bc} \sum_{j=1}^3 S_{ajj}. \quad (1.13)$$

$\delta_{ij}$  est le symbole de Kroenecker,

$$a^{k,l} = \frac{l!}{(2l-1)!!} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} \frac{(2l-2k-1)!!}{(l-2k)!}, \quad (1.14)$$

---

1. Le groupe  $SO(3)$  (pour *Special Orthogonal group*) est le groupe des rotations autour de l'origine dans l'espace euclidien à trois dimensions  $\mathbb{R}^3$  muni de la loi de composition. Ces rotations préservent l'origine, la distance Euclidienne et l'orientation. Ce groupe correspond aussi aux matrices orthogonales de déterminant égal à 1 (d'où son nom).

$\left[\frac{l}{2}\right]$  représente la partie entière de  $\frac{l}{2}$ ,  $l!$  est la fonction factorielle classique et enfin,

$$l!! = l(l-2)(l-4)\cdots \times \begin{cases} 1 & \text{si } l \text{ est impair,} \\ 2 & \text{si } l \text{ est pair.} \end{cases} \quad (1.15)$$

Exemples de tenseurs STF :

– Avec  $l = 2$  :

La trace d'ordre 0 de  $\mathcal{A}$  est  $\sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj)}$ . Donc,

$$\hat{\mathcal{A}}_{i_1 i_2} = \mathcal{A}_{(i_1 i_2)} - \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_2} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj)}.$$

Cela correspond à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}A_{11} - \frac{1}{3}A_{22} - \frac{1}{3}A_{33} & \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21}) & \frac{1}{2}(A_{13} + A_{31}) \\ \frac{1}{2}(A_{12} + A_{21}) & \frac{2}{3}A_{22} - \frac{1}{3}A_{11} - \frac{1}{3}A_{33} & \frac{1}{2}(A_{23} + A_{32}) \\ \frac{1}{2}(A_{13} + A_{31}) & \frac{1}{2}(A_{23} + A_{32}) & \frac{2}{3}A_{33} - \frac{1}{3}A_{11} - \frac{1}{3}A_{22} \end{pmatrix},$$

qui est bien symétrique et de trace nulle.

– Avec  $l = 3$  :

Il y a 3 traces (qu'on devrait plutôt appeler *contractions*) d'ordre 1 :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj1)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj2)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj3)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(j1j)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(j2j)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(j3j)} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(1jj)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(2jj)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(3jj)} \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\hat{\mathcal{A}}_{i_1 i_2 i_3} = \mathcal{A}_{(i_1 i_2 i_3)} - \frac{1}{5} \left( \delta_{i_1 i_2} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj i_3)} + \delta_{i_1 i_3} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(j i_2 j)} + \delta_{i_2 i_3} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(i_1 j j)} \right).$$

– Avec  $l = 4$  :

Il y a 6 traces d'ordre 2. En voici un exemple :

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj11)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj12)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj13)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj21)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj22)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj23)} \\ \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj31)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj32)} & \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jj33)} \end{pmatrix},$$

mais aussi 3 traces d'ordre 0 :

$$\sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nnmm)}, \sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nmmn)} \text{ et } \sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nmnm)}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_{abcd} = & \mathcal{A}_{(abcd)} - \frac{6}{7} \left( \delta_{ab} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jjcd)} + \delta_{ac} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jbjd)} + \delta_{ad} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(jbcj)} \right. \\ & + \delta_{bc} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(ajjd)} + \delta_{bd} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(ajcj)} + \delta_{cd} \sum_{j=1}^3 \mathcal{A}_{(abjj)} \Big) \\ & + \frac{3}{35} \left( \delta_{ab} \delta_{cd} \sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nnmm)} + \delta_{ac} \delta_{bd} \sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nmmn)} \right. \\ & \left. + \delta_{ad} \delta_{bc} \sum_{n,m=1}^3 \mathcal{A}_{(nmnm)} \right) \end{aligned}$$

La base des tenseurs STF de rang  $l$  est (Mathis et Le Poncin-Lafitte, 2009) (avec  $0 < m \leq l$ ) :

$$\hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m} = \mathcal{N}_{l,m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{l-m}{2} \rfloor} a^{lmj} \delta_{(i_1 i_2} \dots \delta_{i_{2j-1} i_{2j}} E_{i_{2j+1}}^+ \dots E_{i_{2j+m}}^+ E_{i_{2j+m+1}}^0 \dots E_{i_l}^0) \quad (1.16)$$

avec

$$a^{lmj} = \frac{(-1)^j}{2^l j! (l-j)!} \frac{(2l-2j)!}{(l-m-2j)!}, \quad \mathcal{N}_{l,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}, \quad (1.17)$$

et

$$E^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Cette base représente une base irréductible du groupe de rotation  $\text{SO}(3)$  (Courant et Hilbert, 1953; Gelfand *et al.*, 1963). Elle est entièrement équivalente aux harmoniques sphériques (voir Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009)).

### 1.3.2 Expression du potentiel

Le potentiel gravitationnel d'un corps agissant sur un point extérieur  $(x, y, z)$  dans le formalisme des tenseurs STF s'écrit (Mathis et Le Poncin-Lafitte, 2009) :

$$V(x, y, z) = GM \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l R_0^l \mathcal{M}_{l,m} \frac{Y_{l,m}(x, y, z)}{r^{l+1}} \quad (1.19)$$

où

- $G$  est la constante de gravitation,
- $M$  est la masse du corps,

- $R_0$  est son rayon moyen,
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,
- $\mathcal{M}_{l,m} = \frac{1}{MR_0^l} M_{l,m}$  et  $M_{l,m}$  est le moment gravitationnel, un coefficient dépendant des  $C_{l,m}$  et  $S_{l,m}$  du développement en harmoniques sphériques,
- $Y_{l,m}(x, y, z)$  est une fonction liée aux fonctions de Legendre associées (définie plus loin).

Évaluons concrètement ce potentiel et établissons le lien avec les harmoniques sphériques.

### Calcul des $\mathcal{M}_{l,m}$

Les termes  $M_{l,m}$  sont définis comme :

$$M_{l,m} = \frac{4\pi}{2l+1} \int_M r^l Y_{l,m}^*(\theta, \phi) dM \quad (1.20)$$

où  $dM = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$  avec  $\rho$ , la densité du corps et  $(r, \theta, \phi)$ , les coordonnées sphériques du point correspondant à  $dM$ . Les  $\mathcal{M}_{l,m}$  sont liés aux coefficients des harmoniques sphériques par l'équation (pour  $m \geq 0$ ) (voir Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009)) :

$$\mathcal{M}_{l,m} = \text{sign}(C_{l,m}) |\mathcal{M}_{l,m}| e^{i \text{Arg}(\mathcal{M}_{l,m})},$$

avec

$$|\mathcal{M}_{l,m}| = \frac{1}{\mathcal{N}_l^m} \sqrt{\left(\frac{C_{l,m}}{2 - \delta_{m,0}}\right)^2 + \left(\frac{S_{l,m}}{2}\right)^2 (1 - \delta_{m,0})^2},$$

$$\mathcal{N}_{l,m} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_l^m = (-1)^m \mathcal{N}_{l,m}$$

et

$$\text{Arg}(\mathcal{M}_{l,m}) = -\text{Arctan}\left(\frac{(1 - \delta_{m,0})(2 - \delta_{m,0})}{2} \frac{S_{l,m}}{C_{l,m}}\right).$$

Ceci signifie, pour  $m = 0$ ,

$$\mathcal{M}_{l,m} = \frac{C_{l,m}}{\mathcal{N}_{l,m}}, \quad (1.21)$$

et pour  $m > 0$ ,

$$\mathcal{M}_{l,m} = \text{sign}(C_{l,m}) \frac{\sqrt{C_{l,m}^2 + S_{l,m}^2}}{2\mathcal{N}_{l,m}} e^{-i \text{Arctan}\left(\frac{S_{l,m}}{C_{l,m}}\right)}. \quad (1.22)$$

Enfin, pour  $m < 0$ , nous avons (voir Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009)) :

$$\mathcal{M}_{l,m} = (-1)^{-m} \mathcal{M}_{l,m}^* \quad (1.23)$$

où  $*$  représente le complexe conjugué.

**Calcul des  $Y_{l,m}(x, y, z)$** 

Pour  $m \geq 0$ ,  $Y_{l,m}$  est exprimé en coordonnées sphériques :

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \mathcal{N}_{lm} \mathcal{P}_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1.24)$$

où  $\mathcal{P}_{lm}$  est la fonction de Legendre associée.

Pour l'évaluer, nous utilisons plutôt la formulation cartésienne (pour  $m \geq 0$ ) :  $Y_{l,m}(x, y, z) = \hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m} \cdot n_L(x, y, z)$  où  $\cdot$  représente le produit scalaire et  $n_L = n^{i_1} n^{i_2} \dots n^{i_l}$  où  $n(x, y, z)$  est le vecteur unité orientant le point  $(x, y, z)$  par rapport au repère.

Pour  $m < 0$ ,

$$Y_{l,m} = (-1)^{-m} Y_{l,-m}^*. \quad (1.25)$$

Exemples :

– Avec  $l = 1$  :

$$\hat{\mathcal{Y}}_L^{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_L^{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$n_L = n = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$$

– Avec  $l = 2$  :

$$\hat{\mathcal{Y}}_L^{2,0} = \mathcal{N}_{2,0} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{Y}}_L^{2,1} = \mathcal{N}_{2,1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 3i/2 \\ 3/2 & 3i/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_L^{2,2} = \mathcal{N}_{2,2} \begin{pmatrix} 3 & 3i & 0 \\ 3i & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad n_L = \begin{pmatrix} x^2/r^2 & xy/r^2 & xz/r^2 \\ xy/r^2 & y^2/r^2 & yz/r^2 \\ xz/r^2 & yz/r^2 & z^2/r^2 \end{pmatrix}.$$

### 1.3.3 Calcul de la force et de la jacobienne

Afin d'utiliser le potentiel (1.19) dans un programme informatique, nous calculons les composantes de la force liée à ce potentiel. Celles-ci s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = GM \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l R_0^l \mathcal{M}_{l,m} \left( \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial x}(x, y, z) - \frac{x(l+1)Y_{l,m}(x, y, z)}{r^{l+3}} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial y} = GM \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l R_0^l \mathcal{M}_{l,m} \left( \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial y}(x, y, z) - \frac{y(l+1)Y_{l,m}(x, y, z)}{r^{l+3}} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial z} = GM \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l R_0^l \mathcal{M}_{l,m} \left( \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial z}(x, y, z) - \frac{z(l+1)Y_{l,m}(x, y, z)}{r^{l+3}} \right), \end{array} \right. \quad (1.26)$$

avec  $\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial x}(x, y, z) = \hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m} \cdot \frac{\partial n_L}{\partial x}(x, y, z)$  où  $\cdot$  est le produit scalaire (idem pour  $y$  et  $z$ ).

$\frac{\partial n_L}{\partial x}(x, y, z)$  est calculé par récurrence :

$$\frac{\partial n_L}{\partial x} = n^{i_1} \left( \frac{\partial}{\partial x} (n^{i_2} \dots n^{i_l}) \right) + \frac{\partial n^{i_1}}{\partial x} (n^{i_2} \dots n^{i_l}).$$

Nous exprimons uniquement :

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1/r - x^2/r^3 \\ -xy/r^3 \\ -xz/r^3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = \begin{pmatrix} -xy/r^3 \\ 1/r - y^2/r^3 \\ -yz/r^3 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial n}{\partial z} = \begin{pmatrix} -xz/r^3 \\ -yz/r^3 \\ 1/r - z^2/r^3 \end{pmatrix}.$$

Pour évaluer le MEGNO (voir section 2.1), nous calculons aussi les composantes de la matrice jacobienne du potentiel (1.19) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \circ \partial *} = & GM \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l R_0^l \mathcal{M}_{l,m} \left( \frac{1}{r^{l+1}} \frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \circ \partial *} - \frac{l+1}{r^{l+3}} \left( \circ \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial *} + * \frac{\partial Y_{l,m}}{\partial \circ} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^*}{\partial \circ} Y_{l,m} \right) + \frac{\circ * (l+1)(l+3)Y_{l,m}}{r^{l+5}} \right), \end{aligned}$$

où  $\circ$  et  $*$  sont  $x, y$  ou  $z$ . De plus,  $\frac{\partial^2 Y_{l,m}}{\partial \circ \partial *} (x, y, z) = \hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m} \cdot \frac{\partial^2 n_L}{\partial \circ \partial *} (x, y, z)$  où  $\cdot$  est le produit scalaire.

### Simplifications pour l'intégration numérique

Les termes avec  $m < 0$  sont les complexes conjugués des termes en  $-m$ . Il n'est donc pas nécessaire de les calculer. On prend simplement deux fois la

partie réelle des termes en  $m > 0$ .

Les coefficients  $\mathcal{N}_{l,m}$  servent de normalisateurs et se simplifient dans les calculs. Il est donc inutile de les calculer.

Les  $\mathcal{M}_{l,m}$  et les  $\hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m}$  sont invariants durant toute l'intégration. On peut donc les calculer une fois pour toutes au début du programme.

## 1.4 Le couplage de potentiel développé à l'aide des tenseurs STF

Supposons à présent que nous sommes confrontés à deux corps de masses équivalentes. Nous allons alors développer le potentiel (1.3) à l'aide des tenseurs STF.

### 1.4.1 Potentiel d'interaction dans le formalisme des tenseurs STF

Le potentiel d'interaction gravitationnelle mutuelle de deux corps  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est défini dans Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009) par :

$$V_{1-2} = GM_1 M_2 \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} R_1^{l_1} R_2^{l_2} \left( \mathcal{M}_{l_1, m_1}^1 \mathcal{M}_{l_2, m_2}^2 (-1)^{l_1} \gamma_{l_2, m_2}^{l_1, m_1} \frac{Y_{l_1+l_2, m_1+m_2}(\theta_{12}, \phi_{12})}{r_{12}^{l_1+l_2+1}} \right), \quad (1.27)$$

où

- $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$  est le vecteur reliant le centre de masse du corps  $\mathcal{B}_1$  au centre de masse du corps  $\mathcal{B}_2$  dont les coordonnées sphériques sont notées  $(r_{12}, \theta_{12}, \phi_{12})$ ,
- $\gamma_{l_2, m_2}^{l_1, m_1}$  est un coefficient ne dépendant que de  $l_1, m_1, l_2$  et  $m_2$  donné par :

$$\gamma_{j,k}^{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{(l+m)!(l-m)!} \frac{2j+1}{(j+k)!(j-k)!} \frac{(l+j-m-k)!(l+j+m+k)!}{4\pi(2l+2j+1)}}.$$

Cette expression du couplage du potentiel de deux corps a l'avantage d'être simple et compacte. Notons qu'on retrouve bien le potentiel d'un corps agissant sur un point lorsqu'on considère  $\mathcal{B}_2$  comme une masse ponctuelle, de même si l'on considère  $\mathcal{B}_1$  comme une masse ponctuelle et qu'on inverse le sens du vecteur reliant les 2 corps.

Prêtons attention au fait que les rotations propres des deux corps interviennent. En effet, avec le potentiel gravitationnel d'un seul corps, on travaille dans le repère tournant lié au spin du corps. Le corps présente donc toujours les mêmes "trous" et "bosses" par rapport au repère tournant. Les coefficients des harmoniques sphériques sont donc constants avec le temps, ce qui n'est plus le cas lorsqu'on travaille dans un autre repère.

Avec un potentiel mutuel, les équations du mouvement ne peuvent pas être écrites dans les repères tournants des 2 corps en même temps. Nous écrivons alors les équations du mouvement dans le repère tournant d'un des deux corps puis nous effectuons une rotation des coefficients des harmoniques sphériques pour le second.

La relation entre les coefficients des harmoniques sphériques dans un repère inertiel  $\mathcal{R}$  et ceux calculés dans le repère lié au corps  $\mathcal{R}_t$  dépend des angles d'Euler qui orientent le repère  $\mathcal{R}_t$  par rapport au repère  $\mathcal{R}$ . Lorsqu'on considère la convention d'angles d'Euler 3-1-3 ( $\psi, \theta, \phi$ ) (ce qu'on fera ici), alors on passe du repère  $\mathcal{R}$  au repère lié au corps  $\mathcal{R}_t$  par trois rotations successives<sup>2</sup> (voir figure 1.3) :

1. une rotation autour du troisième axe d'angle  $\psi$ , appelée *précession*,
2. une rotation autour du premier axe d'angle  $\theta$ , appelée *nutation*,
3. une rotation autour du troisième axe d'angle  $\phi$ , appelée *rotation propre*.

La matrice de rotation permettant de transformer les coordonnées d'un point exprimées dans le repère  $\mathcal{R}$  en les coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}_t$  est donc :

$$R = \begin{pmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & s_\psi c_\phi + c_\psi c_\theta s_\phi & s_\theta s_\phi \\ -c_\psi s_\phi - s_\psi c_\theta c_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & s_\theta c_\phi \\ s_\psi s_\theta & -c_\psi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

avec les notations  $c_x = \cos x$  et  $s_x = \sin x$ . La transposée de cette matrice est appelée *matrice d'attitude*.

Afin d'écrire les coefficients des harmoniques sphériques dans le repère lié au corps  $\mathcal{R}_t$ , on utilise les résultats de Wigner (1959), déjà appliqués à ce genre

---

2. La convention utilisée pour les matrices de rotation est (avec  $R_\alpha(\theta)$  la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\alpha$ ) :

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



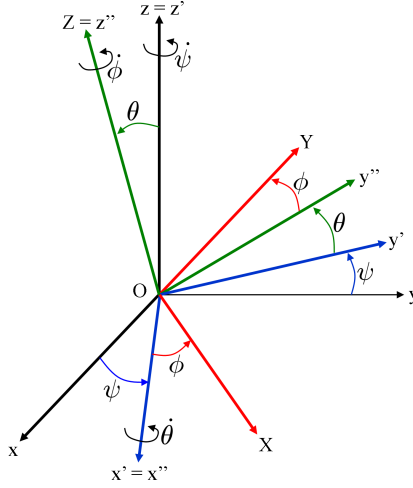


FIGURE 1.3 – Transformation du repère  $\{x, y, z\}$  en le repère  $\{X, Y, Z\}$  par les angles d'Euler.

de problème par Borderies (1978). Pour  $m \geq 0$ , on trouve (les détails de ce calcul se trouvent dans l'annexe B.1) :

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = \frac{(-1)^m}{(l+m)!} \mathcal{N}_{l,-m} \sum_{k=-l}^l (l+k)! E_{l,-m}^{-k}(\psi, \theta, \phi) \frac{(-1)^k}{\mathcal{N}_{l,-k}} M_{l,k}^{\mathcal{R}_t} \quad (1.29)$$

avec

$$E_{l,m}^k(\psi, \theta, \phi) = (-1)^{l-m} e^{i(k-m)\frac{\pi}{2}} e^{i(m\psi+k\phi)} H_{l,m}^k(\theta)$$

et

$$H_{l,m}^k(\theta) = \sum_{j=\inf(0, -m-k)}^{\inf(l-m, l-k)} (-1)^j \binom{l-m}{j} \binom{l+m}{m+k+j} \times \\ \times \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+m+k} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(l-j)-m-k}$$

où la notation  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Pour  $m < 0$ , nous utiliserons (1.23).

Nous calculons donc les  $M_{l,k}^{\mathcal{R}_t}$  ( $-l \leq k \leq l$ ) une fois pour toutes au début du programme et puis nous évaluons les  $M_{l,m}^{\mathcal{R}}$  à chaque itération en fonction des angles d'Euler. Nous avons choisi ici d'écrire les équations du mouvement dans le repère tournant de  $\mathcal{B}_1$  (qui sera le corps le plus massif). On modifie

donc les termes  $M_{l,k}$  pour le corps  $\mathcal{B}_2$  avec, comme angles d'Euler, ceux qui transforment le repère tournant lié à  $\mathcal{B}_2$  en le repère tournant lié à  $\mathcal{B}_1$ .

### Simplifications et cas particuliers

Contrairement au potentiel simple, les termes avec  $m_1$  ou  $m_2$  négatifs ne correspondent plus exactement aux termes avec  $m_1$  et  $m_2$  positifs (si l'un des deux est négatif et l'autre positif). On considère donc tous les termes. Cependant, on utilise le fait que  $M_{l,m}^{\mathcal{R}_t} = (-1)^{-m} M_{l,-m}^{\mathcal{R}_t*}$  (équation (1.23)) et  $Y_{l,m}(x, y, z) = (-1)^{-m} Y_{l,-m}^*(x, y, z)$  lorsque  $m$  est négatif.

Les coefficients  $\mathcal{N}_{l,m}$  se simplifient de nouveau dans les calculs.

Un cas particulier pour le calcul de la rotation du terme  $M_{l,k}^{\mathcal{R}_t}$  est intéressant à mettre en évidence : si  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . Dans ce cas, un seul terme dans le calcul de  $E_{l,-m}^{-k}$  et de  $H_{l,-m}^{-k}$  est non nul : lorsque  $k = m$  et  $j = l + m$ . On a alors :

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = e^{-im(\psi+\phi)} M_{l,k}^{\mathcal{R}_t}. \quad (1.30)$$

#### 1.4.2 Le problème des deux corps rigides

Nous écrivons à présent les équations du mouvement du problème des deux corps rigides et nous calculons les dérivées nécessaires à l'utilisation de ces équations. Pour ce faire, nous introduisons la notation suivante : soit un vecteur  $\vec{x} = [x^1 \ x^2 \ x^3]^T$ , nous définissons la matrice  $3 \times 3$  :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De nombreux travaux ont été réalisés sur l'expression du problème des deux corps rigides et sur l'étude de ses caractéristiques (Maciejewski 1995; Scheeres 2002a; Fahnestock et Scheeres 2008; Boué et Laskar 2009). Dans Scheeres (2002a,b, 2006) par exemple, les deux corps sont approximés par un ensemble de masses ponctuelles et des conditions de stabilité sont identifiées pour le problème des deux corps complet. Nous utilisons ici la formulation de Maciejewski 1995.

### Les équations du mouvement

Soient deux corps rigides  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  interagissant mutuellement (selon la loi universelle de gravitation et sans aucune autre force extérieure) et un repère inertiel de référence  $\mathcal{F}$  (dont l'origine est notée  $O$ ). Dans ce repère, les centres de masse des corps sont situés à  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) et la position relative des corps est définie par  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  et  $\vec{p} = m\vec{r}$  avec  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Nous définissons aussi

les repères  $\mathcal{F}_i$  tournant avec le spin du corps  $\mathcal{B}_i$  et  $A_i$  la matrice d'attitude du corps  $\mathcal{B}_i$ , orientant donc le corps  $\mathcal{B}_i$  par rapport au repère  $\mathcal{F}$  ( $i = 1, 2$ ). Dans le repère  $\mathcal{F}_1$ ,  $\vec{R} = A_1^T \vec{r}$  est la position initiale du centre de masse de  $\mathcal{B}_2$  et  $\vec{P} = A_1^T \vec{p}$ , est l'équivalent pour  $\vec{p}$ .

Les équations du mouvement dans le repère  $\mathcal{F}_1$  s'écrivent (Maciejewski, 1995) :

$$\dot{\vec{P}} = \vec{P} \times \vec{\Omega}_2 - \frac{\partial V}{\partial \vec{R}}, \quad \dot{\vec{R}} = \vec{R} \times \vec{\Omega}_2 + \frac{1}{m} \vec{P}, \quad (1.31)$$

$$\dot{\vec{\Gamma}}_1 = \vec{\Gamma}_1 \times \vec{\Omega}_2 + \vec{\mu}_1, \quad \dot{\vec{\Gamma}}_2 = \vec{\Gamma}_2 \times \vec{\Omega}_2 + \vec{\mu}_2, \quad (1.32)$$

$$\dot{A} = A \hat{\Omega}_2 - \hat{\Omega}_1 A, \quad (1.33)$$

$$\dot{A}_2 = A_2 \hat{\Omega}_2, \quad (1.34)$$

avec

$$\vec{\Omega}_2 = I_2^{-1} \vec{\Gamma}_2, \quad \vec{\Omega}_1 = I_1^{-1} A \vec{\Gamma}_1. \quad (1.35)$$

où  $\vec{\Omega}_i$  est le vecteur de vitesse angulaire du corps  $\mathcal{B}_i$  ( $i = 1, 2$ ) exprimé dans son propre repère,  $A = A_1^T A_2$ ,  $I_i$  est le tenseur d'inertie du corps  $\mathcal{B}_i$ , représentant la distribution de masse du corps  $\mathcal{B}_i$  et les  $\vec{\mu}_i$  sont définis par :

$$\vec{\mu}_1 = -\vec{\alpha} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\alpha}} - \vec{\beta} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\beta}} - \vec{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\gamma}} \quad (1.36)$$

et

$$\vec{\mu}_2 = \vec{R} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{R}} + \vec{\alpha} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\alpha}} + \vec{\beta} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\beta}} + \vec{\gamma} \times \frac{\partial V}{\partial \vec{\gamma}} \quad (1.37)$$

avec  $A^T = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]$ .

L'Hamiltonien du système est constant et vaut :

$$H = \frac{1}{2m} \|\vec{P}\|^2 + \frac{1}{2} \langle A \vec{\Gamma}_1, I_1^{-1} A \vec{\Gamma}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{\Gamma}_2, I_2^{-1} \vec{\Gamma}_2 \rangle + V \quad (1.38)$$

### Calcul des dérivées du potentiel mutuel

Dans les équations du mouvement, plusieurs dérivées partielles interviennent :  $\frac{\partial V}{\partial \vec{R}}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \vec{\alpha}}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial \vec{\beta}}$  et  $\frac{\partial V}{\partial \vec{\gamma}}$ .

Nous calculons les composantes de la force  $\frac{\partial V}{\partial \vec{R}} = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{12}}$  liée au potentiel

mutuel (1.27). Celles-ci s'écrivent :

$$\frac{\partial V}{\partial *}=GM_1M_2\sum_{l_1=0}^{+\infty}\sum_{m_1=-l_1}^{l_1}\sum_{l_2=0}^{+\infty}\sum_{m_2=-l_2}^{l_2}R_1^{l_1}R_2^{l_2}\left(\mathcal{M}_{l_1,m_1}^1\mathcal{M}_{l_2,m_2}^2(-1)^{l_1}\right. \\ \left.\Gamma_{l_2,m_2}^{l_1,m_1}\left(\frac{1}{r_{12}^{l_1+l_2+1}}\frac{\partial Y_{l_1+l_2,m_1+m_2}}{\partial *}-\frac{*(l_1+l_2+1)Y_{l_1+l_2,m_1+m_2}}{r_{12}^{l_1+l_2+3}}\right)\right)$$

avec  $*$   $\in \{x_{12}, y_{12}, z_{12}\}$  et  $\frac{\partial Y_{l,m}}{\partial *}= \hat{\mathcal{Y}}_L^{l,m} \cdot \frac{\partial \underline{n}_L}{\partial *}$  où  $\cdot$  est le produit scalaire.

Le calcul des autres dérivées est plus ardu. La matrice  $A^T$  s'écrit, avec la convention d'angles d'Euler 3-1-3 ( $\psi, \theta, \phi$ ) :

$$A^T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & s_\psi c_\phi + c_\psi c_\theta s_\phi & s_\theta s_\phi \\ -c_\psi s_\phi - s_\psi c_\theta c_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & s_\theta c_\phi \\ s_\psi s_\theta & -c_\psi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

avec les notations  $c_x = \cos x$  et  $s_x = \sin x$ .

Les composantes de la matrice  $A^T$  ne sont pas directement présentes dans l'expression du potentiel. Par contre, nous retrouvons les angles d'Euler dans la rotation des coefficients  $\overline{M}_{l,m}^{\mathcal{R}}$  pour le corps  $\mathcal{B}_2$  (et uniquement là). Nous calculons finalement :

$$\frac{\partial V}{\partial *} = \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial *} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial *} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial *} \quad \text{avec } * \in \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}. \quad (1.40)$$

Ces calculs longs et complexes sont présentés dans l'annexe B.2.



# Chapitre 2

## Outils

Dans ce chapitre, nous présentons plusieurs outils et notions utilisés dans la suite.

### 2.1 MEGNO

Afin d'étudier le comportement régulier ou chaotique de différents systèmes, nous utilisons l'indicateur de chaos MEGNO (Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits) défini par Cincotta et Simó (2000). Nous l'introduisons ici brièvement.

Considérons un système dynamique décrit par les équations suivantes :

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{f}(\vec{x}(t)), \text{ avec } \vec{x} \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (2.1)$$

Supposons que  $\vec{\phi}(t)$  est une solution du système. Soit un vecteur  $\vec{\delta}_\phi(t)$  correspondant à un déplacement infinitésimal le long de  $\vec{\phi}(t)$ , comme par exemple le vecteur tangent<sup>1</sup>, l'évolution de ce vecteur est donnée par :

$$\dot{\vec{\delta}}_\phi = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{\phi}(t)) \vec{\delta}_\phi(t). \quad (2.2)$$

L'indicateur MEGNO, basé sur une version modifiée de la forme intégrale du nombre caractéristique de Lyapunov, est défini par (Cincotta et Simó, 2000) :

$$Y_\phi(t) = \frac{2}{t} \int_0^t \frac{\dot{\vec{\delta}}_\phi \cdot \vec{\delta}_\phi}{\|\vec{\delta}_\phi\|^2} s ds, \quad (2.3)$$

---

1. On pourrait aussi prendre pour  $\vec{\delta}(t)$ , le vecteur joignant deux solutions initialement proches par exemple.

et le MEGNO moyen par :

$$\overline{Y}_\phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t Y_\phi(s) ds. \quad (2.4)$$

Cette quantité est une caractérisation du taux de divergence de deux orbites proches. Pour des orbites stables quasi-périodiques,  $\overline{Y}_\phi$  converge vers 2 et pour des mouvements chaotiques,  $\overline{Y}_\phi$  tend vers l'infini. Pour des orbites périodiques,  $\overline{Y}_\phi$  converge vers 0. Lorsque nous analysons la dynamique d'un système multiple (un astéroïde et plusieurs satellites), le MEGNO est calculé par rapport à l'évolution orbitale de tous les satellites, pris dans leur ensemble. Cet indicateur représente donc bien le comportement global du système.

En ce qui concerne le calcul numérique du MEGNO, nous adoptons la même stratégie que Goździewski *et al.* (2008a). Il est aussi possible d'obtenir à partir du MEGNO une bonne estimation du temps de Lyapunov  $T_\lambda = \frac{1}{\lambda}$ . Pour cela, nous utilisons un ajustement linéaire de  $\overline{Y}_\phi(t)$  par la méthode des moindres carrés où la pente de la droite est  $\frac{\lambda}{2}$  (Cincotta et Simó, 2000). De plus, Mestre *et al.* (2011) ont montré récemment une relation intrinsèque entre le MEGNO et l'indicateur de chaos FLI (Fast Lyapunov Indicator). Une comparaison de ces deux indicateurs de chaos, parmi d'autres, est présentée (pour les mappings) dans Maffione *et al.* (2011).

Par construction, le MEGNO dépend de la valeur initiale du vecteur  $\vec{\delta}_\phi(0)$ . Lorsque celui-ci est dans la direction de l'exposant minimal de Lyapunov, le MEGNO garde artificiellement une valeur très faible (Breiter *et al.*, 2005). Pour les cartes de MEGNO, nous prenons un vecteur tangent initial aléatoire afin d'éviter un maximum ces zones artificielles.

Dans la suite, nous appellerons "MEGNO" le MEGNO moyen  $\overline{Y}$ .

## 2.2 NIMASTEP

La plupart des simulations numériques de cette thèse ont été réalisées avec un logiciel numérique développé par notre équipe : **N**umerical **I**ntegration of the **M**otion of an **A**rtificial **S**atellite orbiting a **T**elluric **P**lanet, en plus court **NIMASTEP**. Ce logiciel a été créé par Nicolas Delsate et a été utilisé dans de nombreux contextes (par exemple dans Valk *et al.* 2009, Delsate *et al.* 2010, Delsate 2011). À l'origine, il permet de calculer le mouvement osculateur d'un objet arbitraire en rotation autour d'une planète. Il a ensuite été modifié par Nicolas Delsate et moi-même afin de pouvoir traiter des problèmes plus généraux. Ce code est présenté en détail et validé dans l'article Delsate et Compère (2012) et dans la thèse de Nicolas Delsate (Delsate, 2011).

Les améliorations principales que j'ai effectuées sur ce logiciel avec l'aide de Nicolas Delsate sont les suivantes :

- intégrer la force dérivant du potentiel ellipsoïdal (1.11) ainsi que ses dérivées secondes (pour pouvoir utiliser l'indicateur de chaos MEGNO),
- permettre l'intégration de plusieurs satellites en interaction entre eux (toujours avec l'utilisation du MEGNO).

J'ai aussi développé une version de NIMASTEP permettant une intégration du problème des deux corps complet avec le formalisme des tenseurs STF (développé dans le chapitre précédent). Cependant, cette version du logiciel ne permet pas encore toutes les fonctionnalités qu'avait la version précédente. Elle ne permet par exemple pas encore de calculer le MEGNO.

Des tests sur ces trois améliorations ont été réalisés et sont présentés brièvement ici.

Remarquons que les simulations présentées tout au long de cette thèse ont été réalisées sur un cluster HPC à l'Interuniversity Scientific Computing Facility center (iSCF - <http://www.iscf.be>) situé à l'Université de Namur (Belgique).

### 2.2.1 Tests du potentiel ellipsoïdal

Un premier test de l'intégration du potentiel ellipsoïdal a été réalisé en comparant des intégrations numériques réalisées avec NIMASTEP avec les résultats de l'article Rossi *et al.* (1999). Cet article compare trois codes, l'un basé sur une représentation du corps central en terme de "mascons" (des masses discrètes sphériques) et l'autre représentant le corps central par un polyèdre. L'article teste le potentiel exercé par des ellipsoïdes homogènes sur un point extérieur. L'ellipsoïde utilisé ici est axisymétrique avec  $a = b = 10$  km et  $c = 5$  km et de masse  $M = 2.0943951 \times 10^{15}$  kg. Les conditions initiales des intégrations sont données dans la table 1 de Rossi *et al.* (1999).

Nous avons donc nous aussi intégré le potentiel exercé par cet ellipsoïde avec notre logiciel et le potentiel intégral. Les résultats (pour la variation du nœud ascendant, les autres résultats étant similaires) se trouvent dans la table 2.1. Ils sont très concluants.

Ce potentiel a aussi été validé par les résultats de l'article Compère *et al.* (2012), présentés dans le chapitre suivant. Des simulations numériques avec le potentiel ellipsoïdal et le MEGNO sont validées par un développement analytique.



	Polyèdre	Mascons	Harmo. sphér.	Pot. int.
Orbite circulaire inclinée	$-1.09 \cdot 10^{-5}$	$-1.11 \cdot 10^{-5}$	$-1.07 \cdot 10^{-5}$	$-1.11 \cdot 10^{-5}$
Orbite elliptique inclinée	$-1.25 \cdot 10^{-5}$	$-1.33 \cdot 10^{-5}$	$-1.27 \cdot 10^{-5}$	$-1.33 \cdot 10^{-5}$
Orbite elliptique inclinée et distante	$-7.76 \cdot 10^{-7}$	$-7.92 \cdot 10^{-7}$	$-7.85 \cdot 10^{-7}$	$-7.86 \cdot 10^{-7}$

TABLE 2.1 – Variation du nœud ascendant (en  $rad\ s^{-1}$ ) d’un point orbitant autour d’un ellipsoïde axisymétrique. Les résultats pour la méthode du polyèdre, celle des mascons et celle des harmoniques sphériques viennent de Rossi *et al.* (1999). Les résultats pour la méthode du potentiel intégral ont été obtenu avec le logiciel NIMASTEP.

### 2.2.2 Tests de l’intégration de plusieurs satellites

Notre premier test est la reproduction des résultats de l’article Goździewski *et al.* (2001). Il s’agit de l’intégration des orbites de la Terre, de Jupiter et de Saturne autour du Soleil, ainsi que le calcul du MEGNO global pour ce système. Nos résultats (avec les données de l’article) sont présentés à la figure 2.1 et sont similaires à ceux de la figure 2 de l’article Goździewski *et al.* (2001).

Dans un second temps, des simulations numériques de systèmes multiples composés d’un corps non sphérique et de satellites ont été réalisées et comparées avec les résultats du code numérique d’Emilie Verheyleweden (voir Verheyleweden *et al.* (2013)). Nous avons effectué notamment des tests sur le système d’astéroïdes (87) Sylvia composé d’un astéroïde et de deux satellites (Romulus et Rémus). Les conditions initiales sont présentées dans le chapitre 4. Nous n’utilisons que les coefficients  $C_{2,0}$  et  $C_{4,0}$  du développement en harmoniques sphériques. Nos deux implémentations donnent des résultats équivalents, avec un MEGNO convergeant rapidement vers 2. Un second test a été réalisé avec des conditions initiales identiques excepté le demi-grand axe de Rémus qui est alors égal à 1150 km. Cette fois, nos deux implémentations donnent un MEGNO augmentant linéairement avec le temps indiquant une orbite chaotique. Les éléments orbitaux sont similaires dans les deux cas.

### 2.2.3 Tests de l’intégration du problème des deux corps complet

Dans un premier temps, l’implémentation de la force (1.26) dérivant du potentiel gravitationnel développé dans le formalisme des tenseurs STF a été testée. Des intégrations numériques du système (243) Ida réalisées sur 10 ans

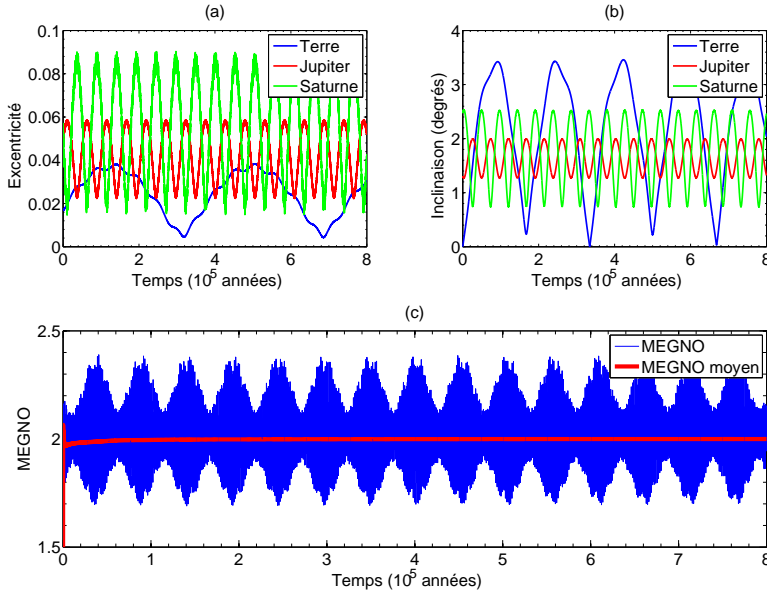


FIGURE 2.1 – Intégration des orbites de la Terre, de Jupiter et de Saturne autour du Soleil réalisée avec NIMASTEP et calcul du MEGNO global pour ce système.

avec le logiciel NIMASTEP en utilisant d’une part les harmoniques sphériques et d’autre part la force (1.26) donnent des résultats égaux jusqu’à 9 chiffres significatifs.

En ce qui concerne l’intégration du problème des deux corps complet, des tests sur l’astéroïde binaire (66391) 1999  $KW_4$  ont été réalisés. Ils sont présentés dans l’article Compère et Lemaître (2013) et dans le chapitre 7.

## 2.3 Ordre de grandeur des forces à considérer

Lors de l’étude de systèmes complexes, il est important d’identifier les principales forces en jeu. Dans le cas de satellites d’astéroïdes, les perturbations usuelles sont la non-sphéricité de l’astéroïde et l’influence des autres corps du système solaire. Afin de déterminer les ordres de grandeur de ces perturbations, nous approximons les forces (dans la direction radiale) grâce aux formules sui-

vantes (Montenbruck et Eberhard, 2000) :

$$a_{J_{n,m}} = (n+1) \frac{GM}{r^2} \frac{R_0^n}{r^n} \sqrt{\bar{C}_{n,m}^2 + \bar{S}_{n,m}^2}, \quad (2.5)$$

$$a_{3b} = \frac{2GM_{3b}}{d_{3b}^3} r, \quad (2.6)$$

où  $a_{J_{n,m}}$  est l'accélération due au terme  $J_{n,m}$  du développement en harmoniques sphériques (1.6),  $a_{3b}$  est l'accélération due à un troisième corps,  $G$  est la constante de gravitation,  $M$  et  $R_0$  sont respectivement la masse et le rayon équatorial du primaire,  $r$  est la distance entre le satellite et le primaire,  $\bar{C}_{n,m}$  et  $\bar{S}_{n,m}$  sont les coefficients normalisés des harmoniques sphériques (1.7),  $M_{3b}$  est la masse du troisième corps et  $d_{3b}$  est la distance entre le troisième corps et le primaire.

Afin de se représenter leur ordre de grandeur, évaluons ces forces pour un système similaire à Ida-Dactyl. Les accélérations dues au Soleil, à Jupiter, à Mars et à la non-sphéricité de l'astéroïde sont tracées à la figure 2.2. L'abscisse est la distance relative du satellite au centre du primaire, c'est-à-dire le rapport entre la distance du satellite au centre du primaire et le rayon équatorial de ce dernier. Si le satellite n'est pas trop loin de l'astéroïde (Dactyl se trouve par exemple à une distance relative d'environ 3.45 de Ida), la seule perturbation significative du mouvement keplerien est la non-sphéricité de l'astéroïde. Remarquons tout de même que seule la composante radiale des forces (et non la composante tangentielle) est calculée. Ce graphique n'est donc pas suffisant pour conclure mais les ordres de grandeur ont été confirmés par une série de tests numériques.

Un concept supplémentaire utilisé à plusieurs reprises dans le manuscrit est la *sphère de Hill*. Celle-ci est la sphère centrée sur l'astéroïde qui détermine le volume dans lequel l'attraction de l'astéroïde domine sur l'attraction du Soleil (voir Goldreich *et al.* (2004) et Murray et Dermott (2000)). Le rayon de la sphère de Hill, appelé *rayon de Hill*, est défini (lorsque l'excentricité de l'astéroïde est négligeable) par :

$$R_{Hill} = a_{ast} \sqrt[3]{\frac{m_{ast}}{3M_{\odot}}}, \quad (2.7)$$

où  $a_{ast}$  et  $m_{ast}$  sont le demi-grand axe et la masse de l'astéroïde, et  $M_{\odot}$  la masse du Soleil. Pour l'astéroïde Ida, par exemple, ce rayon vaut approximativement 8500 km, ce qui correspond à une distance relative d'environ 560 (bien en dehors de la figure 2.2).

## 2.4 Modèles de forme et harmoniques sphériques

Afin de modéliser la forme d'un astéroïde, on peut utiliser des *modèles de forme*. Les modèles de forme sont des points (vertex) et des connexions entre

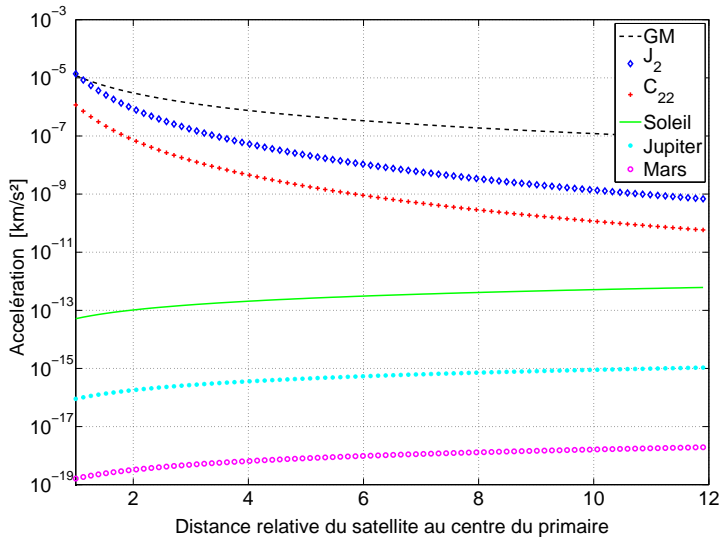


FIGURE 2.2 – Ordre de grandeur des accélérations dans le cas d'un satellite en rotation autour d'un astéroïde similaire à Ida. L'accélération  $GM$  correspond à la gravité due au problème des deux corps et  $J_2$  ( $= -C_{20}$ ) et  $C_{22}$  aux principales contributions des harmoniques sphériques liées à la non-sphéricité du primaire. Les conditions initiales sont : la masse de l'astéroïde est de  $4.79452 \times 10^{16}$  kg, son rayon équatorial vaut 15228.34 m, sa période de rotation est de 4.633 h, son coefficient  $J_2$  vaut 0.38047, son coefficient  $C_{22}$  vaut 0.032247 et la distance moyenne entre l'astéroïde et le Soleil est de 2.86 UA.

ces points représentant des polyèdres à facettes triangulaires. Ils peuvent être représentés graphiquement à l'aide par exemple du logiciel Meshlab<sup>2</sup> (voir figure 2.3). On peut trouver des modèles de forme de nombreux astéroïdes du système solaire dans plusieurs bases de données, notamment DAMIT<sup>3</sup> (Database of Asteroid Models from Inversion Techniques) ou encore la base de données du JPL<sup>4</sup> (Jet Propulsion Laboratory).

À partir d'un modèle de forme, il est possible d'approximer les coefficients des harmoniques sphériques associés à ce corps. Pour ce faire, nous utilisons le logiciel SHTOOLS d'accès gratuit développé par Mark Wieczorek du Centre National de la Recherche Scientifique (Institut de Physique du Globe de Paris)

2. Meshlab est un outil développé par le Visual Computing Lab of ISTI - CNR, avec l'appui du 3D-CoForm project

3. Accessible à l'adresse <http://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/asteroids3D/web.php> (voir Durech *et al.* 2010 pour plus de détails)

4. Accessible à l'adresse <http://echo.jpl.nasa.gov/asteroids/shapes/shapes.html>

en 2009<sup>5</sup>. Ce logiciel manipule et calcule des développements en harmoniques sphériques.

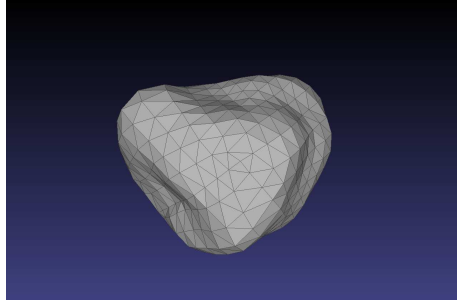


FIGURE 2.3 – Illustration du modèle de forme de l’astéroïde (41) Daphné par le logiciel Meshlab. Le modèle de forme vient de la base de données DAMIT.

Concrètement, la méthode utilisée comporte quatre étapes. Nous transformons d’abord les vertex (donnés en coordonnées cartésiennes) en coordonnées sphériques. Nous projetons ensuite ces points sur les harmoniques sphériques grâce à la routine `SHEExpandLSQ` qui utilise la méthode des moindres carrés. Nous obtenons ainsi les coefficients des harmoniques sphériques liés à la forme de l’astéroïde et pas encore à son potentiel. Nous faisons ensuite l’opération inverse en projetant ces harmoniques sur une grille régulière cette fois-ci avec la routine `MakeGridDH`. Enfin, nous calculons les coefficients des harmoniques sphériques du potentiel à partir de ces points grâce à la routine `CilmPlus`.

Évidemment, cette procédure ne nous permet pas d’obtenir tous les coefficients jusqu’à un ordre indéterminé. Le nombre maximal de coefficients calculés dépend du nombre de vertex du modèle de forme.

Nous avons pu tester avec succès cette procédure sur des ellipsoïdes. En effet, il est facile de construire des modèles de forme d’ellipsoïdes et ensuite de comparer les résultats de nos calculs avec les coefficients des harmoniques sphériques calculés par les formules de Boyce (1997) :

$$C_{2l,2m} = \frac{3}{R^{2l}} \frac{l!(2l-2m)!}{2^{2m}(2l+3)(2l+1)!} (2 - \delta_{0m}) \times \sum_{i=0}^{\text{int}(\frac{l-m}{2})} \frac{(a^2 - b^2)^{m+2i} [c^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)]^{l-m-2i}}{16^i (l-m-2i)! (m+i)! i!}. \quad (2.8)$$

---

5. Le logiciel et sa documentation sont disponibles à l’adresse <http://www.ipgp.fr/~wieczor/SHTOOLS/SHTOOLS.html>

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont les demi-grands axes de l'ellipsoïde (avec  $a \geq b \geq c$ ) et  $R$  est son rayon moyen. Les coefficients  $C_{l,m}$  avec  $l$  ou  $m$  impair, ainsi que les coefficients  $S_{l,m}$  pour  $l$  et  $m$  quelconques sont tous nuls.

## 2.5 Résonances

Dans cette thèse, nous serons confrontés à plusieurs types de résonances, que nous énumérons ci-après. Pour chaque cas, nous considérons une résonance  $k_1 : k_2$  (avec  $k_1$  et  $k_2$  des petits entiers, premiers entre eux), c'est-à-dire que les deux fréquences (ou périodes) considérées ont un rapport  $k_1/k_2$  (ou  $k_2/k_1$ ) proche d'un rationnel. Nous utilisons les éléments orbitaux :  $a$  le demi-grand axe,  $e$  l'excentricité,  $i$  l'inclinaison,  $\Omega$  la longitude du nœud ascendant,  $\omega$  l'argument du péricentre et  $M$  l'anomalie moyenne.

1. **Les résonances gravitationnelles** : un corps fait  $k_1$  rotations sur lui-même pendant que son satellite fait  $k_2$  révolutions. C'est le cas par exemple des orbites géostationnaires qui sont en résonance 1 : 1 avec la Terre. Cette commensurabilité est une résonance si le corps central ne présente pas de symétrie axiale. Son effet est une variation (de longue période) du demi-grand axe du satellite et de l'angle résonant  $k_1 \lambda - k_2 \phi$  où  $\lambda$  est la longitude moyenne du satellite ( $= M + \Omega + \omega$ ) et  $\phi$  est l'angle sidéral du corps central ( $= \nu t + \phi_0$  où  $\nu$  est la vitesse de rotation du corps central).
2. **Les résonances spin-orbite** : un corps fait  $k_1$  rotations sur lui-même pendant qu'il fait  $k_2$  révolutions autour du corps central. L'angle résonant s'écrit  $k_1 \lambda - k_2 \phi_s$  où  $\phi_s$  est l'angle sidéral du satellite. Un exemple classique de cette résonance est la Lune qui est en résonance 1 : 1 (ce qui explique le fait que la Lune présente toujours la même face à la Terre). Mercure est quant à lui en résonance 3 : 2.
3. **Les résonances en moyen mouvement** : deux corps sont en rotation autour d'un troisième. Le premier fait  $k_1$  révolutions autour du corps central pendant que le deuxième en fait  $k_2$ . L'angle résonant s'écrit  $k_1 n_1 - k_2 n_2$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont les moyens mouvements des satellites (liés aux demi-grands axes  $a_1$  et  $a_2$  par la troisième loi de Kepler :  $n_i = \sqrt{GM/a_i^3}$  où  $M$  est la masse du corps central). C'est cet effet qui explique les lacunes de Kirkwood, c'est-à-dire les trous dans la ceinture principale d'astéroïdes aux demi-grands axes en résonance en moyen mouvement avec Jupiter<sup>6</sup>.

---

6. Une résonance peut jouer un rôle de stabilisateur ou au contraire, de déstabilisateur.

4. **Les résonances séculaires (pour des orbites non keplériennes) :**  
 Ce sont des résonances entre des périodes très longues de deux corps, par exemple la précession de leur nœud. On retrouve aussi des résonances entre un angle dit rapide d'un corps en rotation lente et un angle dit lent d'un corps en rotation rapide. C'est le cas par exemple de la résonance d'évection qui a lieu lorsque le moyen mouvement d'un corps  $n_1$  est égal à la fréquence du péricentre d'un second corps  $\dot{\varpi}_2$ . Nous rencontrerons cette résonance dans le chapitre 4 où le premier corps est un astéroïde et le second est son satellite. Lorsque le rapport de ces fréquences est entier mais différent de 1 ( $k_1 n_1 \simeq k_2 \dot{\varpi}_2$ ), nous parlons de résonances de type *évection*.

Deuxième partie

Les satellites d'astéroïdes





# Chapitre 3

## Stabilité d'un petit corps en rotation autour d'un astéroïde ellipsoïdal

### 3.1 Introduction

Le système multiple le plus simple à étudier est le système composé d'un astéroïde et de son satellite. Le premier satellite d'astéroïde découvert, Dactyl, a par exemple été le sujet de plusieurs recherches. Des études de stabilité et des simulations de mécanisme de capture ont été réalisées sur le cas Ida - Dactyl par Giblin *et al.* (1998). Les auteurs concluaient à une capture de Dactyl par Ida, suite à une collision "récente" (un dixième du temps de vie d'Ida). Une étude en ce sens a été réalisée par Petit *et al.* (1997) et puis par Petit et Lemaitre (1997). Les résonances gravitationnelles pourraient avoir joué un rôle très important dans la dynamique à long terme du système binaire. La probabilité de capture est maximale pour le cas 5 :1. Cependant, la modélisation du système est terriblement complexe et peu de cas de simulations ont conduit à une situation de stabilité non temporaire.

De nombreux travaux ont déjà été réalisés sur la stabilité des satellites d'astéroïdes en général. Des orbites planes autour d'un corps ellipsoïdal homogène de demi-grand axe  $\sqrt{2}$ , 1 et  $1/\sqrt{2}$ , en utilisant le potentiel intégral de Mac Millan, ont été étudiées par Chauvineau *et al.* (1993). La méthode présentée dans cet article est appliquée dans Vasilkova (2006) à un ellipsoïde de la forme d'Ida et dans Vasilkova (2008) pour comparer la dynamique plane globale près d'astéroïdes à rotation extrêmement lente (Mathilde) ou très rapide (Ida, Sylvia). Dans Scheeres (1994), la dynamique d'un petit satellite en orbite autour

d'un ellipsoïde triaxial est étudiée principalement de façon analytique. Des conditions de stabilité pour les orbites autour d'ellipsoïdes, la stabilité linéaire des points d'équilibre, et des applications à quelques astéroïdes sont présentées. Afin d'étudier la dynamique autour d'astéroïdes ellipsoïdaux à rotation constante, des modèles de forme réalistes de Eros et de Castalia (en utilisant un développement en harmoniques sphériques) sont utilisés dans Scheeres *et al.* (1996) et Scheeres D. J. (2000). Enfin, dans Vasilkova (2005), des conditions d'existence pour des orbites périodiques à trois dimensions dans le voisinage des points d'équilibre d'un ellipsoïde triaxial allongé sont étudiés (avec une application à un ellipsoïde proche de la forme d'Ida).

Dans ce chapitre, le primaire est approximé par un ellipsoïde homogène de demi-axes  $d$ ,  $b$  et  $c$  avec  $d \geq b \geq c$ <sup>1</sup>. Nous tentons de détecter la présence et la stabilité de résonances gravitationnelles par rapport à la forme de l'astéroïde. Contrairement aux approches classiques où la forme du primaire est fixée et la distance astéroïde-satellite varie, nous fixons cette distance et nous cherchons des formes particulières du primaire donnant des orbites périodiques stables. Plus précisément, nous identifions les courbes de résonance dans le plan  $(\frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ .

Le potentiel intégral défini dans le chapitre 1 est utilisé, ainsi que le logiciel NIMASTEP et l'indicateur de chaos MEGNO décrits au chapitre 2. Contrairement à l'approche classique où le MEGNO est utilisé pour détecter les comportements chaotiques, nous nous intéressons ici aux orbites extrêmement stables avec des valeurs de l'indicateur plus petites que 2, tendant vers 0 avec le temps. Dans les cartes de MEGNO, les zones de stabilité forment des courbes coniques (ellipses ou hyperboles) dans le plan  $(\frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ . Pour les astéroïdes à rotation lente, ces courbes sont expliquées par un modèle analytique, basé sur une simplification du potentiel intégral. Nous obtenons des modèles de résonance à un degré de liberté, paramétrés par l'excentricité et l'inclinaison. Notre approche est surtout une étude académique puisque les situations que nous considérons ici ne sont pas toutes réalistes (voir section suivante).

Les résultats présentés ici ont été réalisés en collaboration avec Anne Lemaitre et Nicolas Delsate et sont publiés dans Compère *et al.* (2012).

## 3.2 Sélection des cas étudiés

Nous choisissons un repère de référence dont l'origine est le centre de l'ellipsoïde avec l'axe  $x$  le long de  $d$ , l'axe  $y$  le long de  $b$  et l'axe  $z$  le long de  $c$ . L'ellipsoïde tourne de façon constante autour de son axe le plus court. Au vu de l'analyse des ordres de grandeur des perturbations agissant sur un système

---

1. Nous utilisons la notation  $d$  à la place de  $a$  pour réserver  $a$  au demi-grand axe de l'orbite du satellite.

semblable à Ida-Dactyl (voir section 2.3), nous ne tiendrons pas compte de l'influence du Soleil et des planètes sur le satellite.

Lorsqu'on étudie la stabilité d'une masse ponctuelle orbitant autour d'un ellipsoïde, plusieurs paramètres entrent en jeu : la longueur des axes de l'ellipsoïde, sa masse, sa vitesse de rotation et l'orbite initiale du satellite. Dans cette section, nous allons discuter la valeur de ces paramètres.

L'astéroïde est modélisé par un ellipsoïde dont l'axe  $d$  est de 500 km et dont la masse est fixée à  $1.047 \times 10^{21}$  kg, ce qui correspond à une densité de masse de  $2 \text{ g/cm}^3$  lorsque le corps primaire est une sphère. La densité de masse de l'ellipsoïde en fonction des rapports de ses demi-axes  $\frac{b}{d}$  et  $\frac{c}{d}$  est présentée à la figure 3.1. La densité de masse pour un astéroïde se situe entre<sup>2</sup> 1 et  $4 \text{ g/cm}^3$ . Les astéroïdes que nous étudions ici ne sont donc réalistes que pour des valeurs de  $b/d$  supérieures à environ 0.7 et  $c/d$  supérieures à environ 0.4. Remarquons aussi que les types d'ellipsoïdes de la figure 3.1 (et des cartes de MEGNO dans la suite) ne sont pas tous réalistes non plus. Les points en bas à gauche de la carte correspondent à des "cigares", les points en bas à droite à des "assiettes" et les points en haut à droite à des ellipsoïdes proches de sphères. De nouveau, les cas les plus réalistes se situent dans le coin en haut à droite du graphique.

L'inclinaison initiale de l'orbite du satellite est inférieure à  $90^\circ$  et la vitesse de rotation de l'ellipsoïde est positive, ce qui fait que l'orbite du satellite est prograde. Les conditions initiales du satellite sont choisies proches d'une résonance gravitationnelle stable. Pour la résonance 1 : 1 par exemple, en utilisant les résultats de Scheeres (1994), nous savons que les équilibres potentiellement stables (les équilibres centraux) sont situés dans la direction de l'axe  $b$  de l'ellipsoïde (et tournent simultanément avec lui). Nous avons donc choisi de prendre  $90^\circ$  comme longitude moyenne initiale (la somme de l'anomalie moyenne, de la longitude du nœud ascendant et de l'argument du péricentre). Notons que la longitude moyenne est déterminée à partir de l'axe des  $x$ .

Nous cherchons aussi le type de l'ellipsoïde (toujours selon Scheeres (1994)) : un ellipsoïde de type I est un ellipsoïde ayant des équilibres centraux stables, tandis qu'un ellipsoïde de type II est un ellipsoïde ayant des équilibres centraux instables. Nous calculons qu'un ellipsoïde, avec un axe  $d$  et une masse fixée, est de type I pour n'importe quelle valeur de  $b$  et  $c$  si sa vitesse de rotation est plus petite qu'à peu près  $1.3 \times 10^{-4} \text{ rad/sec}$ , c'est-à-dire sa période de rotation est supérieure à 13.43 heures. Attention, cela ne signifie pas que les ellipsoïdes ayant une période de rotation inférieure à cette limite sont de type II, mais seulement que, au-dessus de cette limite, nous sommes sûrs qu'ils sont de type I.

---

2. (253) Mathilde a par exemple une densité de masse d'environ  $1.3 \text{ g/cm}^3$  et (4) Vesta d'environ  $3.7 \text{ g/cm}^3$ .

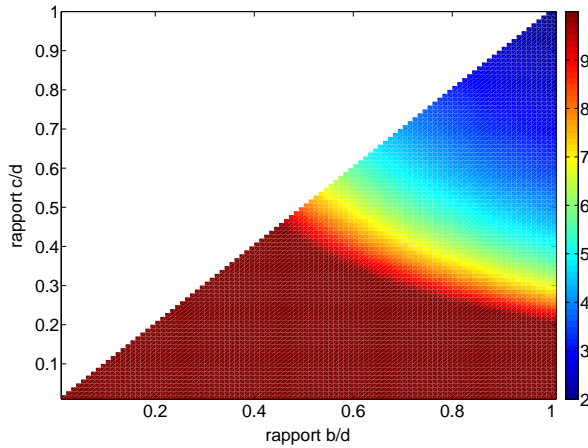


FIGURE 3.1 – Densité de masse (en  $g/cm^3$ ) des ellipsoïdes en fonction des rapports de leur demi-axes. La masse est fixée à  $1.047 \times 10^{21}$  kg. La légende de couleur est bornée par 10 pour mettre en évidence les cas réalistes.

De plus, Vasilkova (2008) a montré que le mouvement d'un satellite autour d'un astéroïde en rotation est réellement dépendant de la vitesse de rotation de l'astéroïde. Par exemple, des zones de mouvements réguliers peuvent disparaître et des zones de chaos peuvent apparaître lorsqu'on passe d'un astéroïde en rotation lente (avec une période d'environ 40 heures) à un astéroïde en rotation rapide (avec une période d'environ 5 heures).

À la figure 3.2, la localisation de quelques résonances gravitationnelles du problème des deux corps est présentée. Un astéroïde rubble-pile<sup>3</sup> doit avoir une période de rotation supérieure à 2.2 h (voir Pravec *et al.* 2006). Cette limite est indiquée sur la figure 3.2. Sur cette figure, nous avons aussi ajouté la limite pour les ellipsoïdes de type I comme calculé précédemment. De plus, Chauvineau *et al.* (1993) ont obtenu que, pour leur modèle particulier (avec des rapports entre les axes de  $\sqrt{2} : 1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ ), les effets de la non-sphéricité de l'astéroïde sont en général négligeables pour des distances supérieures à environ dix fois la taille du primaire, quelle que soit sa vitesse de rotation. Cette limite est aussi ajoutée à la figure 3.2 pour information. Finalement, les diamants représentent les cas de résonances qui seront présentés dans la section suivante (résonances 1 : 1 et 2 : 1).

Le rayon de Hill d'un astéroïde de cette masse situé à la même distance du Soleil que l'astéroïde (243) Ida (donc dans la ceinture principale) est d'environ

---

3. Un astéroïde rubble-pile est un astéroïde composé de nombreux morceaux de roches qui se sont assemblés sous l'influence de la gravité.

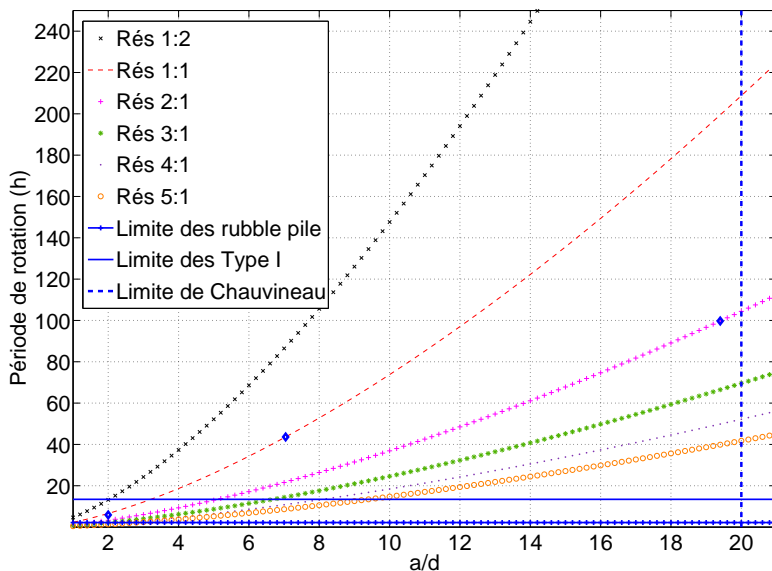


FIGURE 3.2 – Localisation de quelques résonances gravitationnelles dans le problème des deux corps. L'abscisse est le demi-grand axe du satellite divisé par l'axe  $d$  de l'astéroïde et l'ordonnée est la période de rotation de l'astéroïde. De plus, les limites pour l'existence d'un astéroïde rubble-pile, pour un ellipsoïde de type I et pour l'influence de la non-sphéricité de l'astéroïde (déterminé par Chauvineau *et al.* (1993)) sont tracées. Les diamants correspondent aux simulations présentées dans la section suivante.

240 000 km. Ce rayon normalisé par  $d$  est d'environ 480. Cela signifie que les orbites considérées dans ce chapitre sont profondément à l'intérieur de la sphère de Hill de l'astéroïde.

### 3.3 Simulations

Nous utilisons le logiciel NIMASTEP avec un intégrateur Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4 à pas variable et une précision relative de  $10^{-12}$  à chaque pas<sup>4</sup>. Les valeurs du MEGNO qui tendent vers l'infini sont coupées à 3 afin de bien distinguer les structures. Les orbites avec un MEGNO de valeur 3 sont

4. Cet intégrateur nous semble être le meilleur compromis entre précision et vitesse pour cette étude. De plus, Benettin *et al.* (1980) a démontré que tant qu'une certaine précision minimale dans le calcul de l'orbite est préservée, l'exposant maximal de Lyapunov est calculé précisément. Cela est donc logiquement vrai aussi pour le MEGNO. Il n'est donc pas essentiel d'utiliser un intégrateur plus précis ou un intégrateur symplectique.

donc considérées comme chaotiques.

Pour les figures, nous considérons des valeurs fixes pour la masse de l'ellipsoïde, pour sa vitesse de rotation, pour son axe  $d$ , ainsi que pour les conditions initiales du satellite. Les deux autres axes  $b$  et  $c$  de l'ellipsoïde varient. Les cartes présentées dans ce chapitre ont comme axes  $\frac{b}{d}$  et  $\frac{c}{d}$  et chaque point de la carte (composée de  $100 \times 100$  points) correspond à une orbite spécifique. Trois cartes de MEGNO sont présentées aux figures 3.3, 3.4 et 3.5.

Les temps d'intégration pour ces cartes sont choisis de façon à ce que les structures soient bien visibles (50 ou 100 ans). La valeur du MEGNO d'orbites proches d'une résonance converge plus lentement vers 2 que les autres orbites. Ceci explique pourquoi certains points ont un MEGNO d'une valeur entre 0 et 2. Si nous intégrons ces orbites sur une plus longue période, le MEGNO sera égal à 2 et seules les orbites résonnantes auront un MEGNO égal à 0 (Valk *et al.*, 2009). Mais dans ce cas, la structure serait trop fine pour être distinguée sur la carte. C'est pourquoi nous arrêtons nos simulations avant que le MEGNO n'ait atteint sa valeur finale. Nous devons donc considérer que la structure résonante est plus mince que ce que nous voyons sur les cartes de MEGNO.

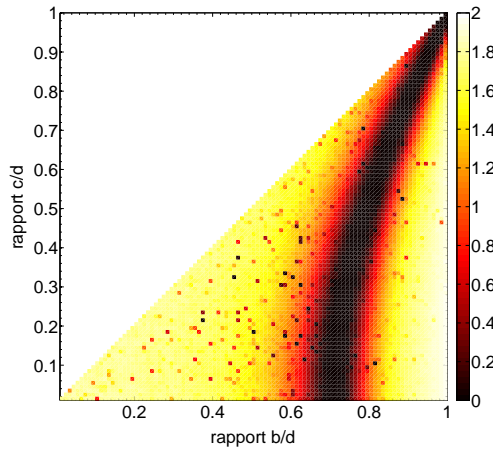


FIGURE 3.3 – Carte de MEGNO de la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0$ . La période de rotation du primaire est de 43.63 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 3521.616$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est de 100 ans.

Sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5, nous repérons des structures ressemblant à des hyperboles. En fait, sur les figures 3.3 et 3.4, les orbites stables dans la structure

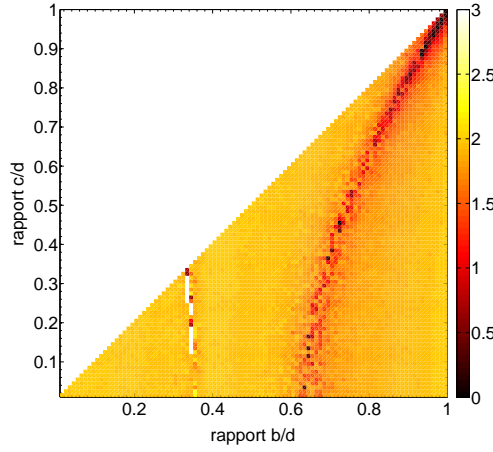


FIGURE 3.4 – Carte de MEGNO de la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0.15$ . La période de rotation du primaire est de 18.67 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 2000$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est de 50 ans. Les valeurs du MEGNO sont limitées à 3 pour distinguer correctement les structures.

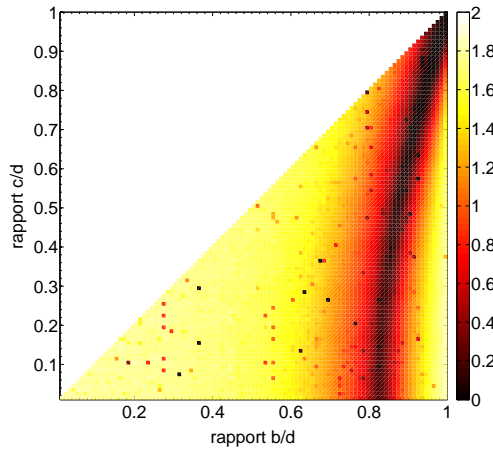


FIGURE 3.5 – Carte de MEGNO de la résonance 2 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0.45$ . La période de rotation du primaire est de 99.733 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 9700.108$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = M_0 = 0^\circ$  et  $\omega_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est de 100 ans.



sont vraiment proches d'une orbite périodique correspondant à une résonance gravitationnelle 1 : 1, c'est-à-dire que la période de rotation de l'ellipsoïde sur lui-même est égale à la période orbitale de la masse ponctuelle. La figure 3.3 correspond à un ellipsoïde tournant lentement alors que la figure 3.4 correspond à un ellipsoïde plus rapide. Comme expliqué dans la section précédente, Vasilkova (2008) a montré que des mouvements chaotiques apparaissent lorsque la vitesse de rotation de l'ellipsoïde augmente (figures 3.3 et 3.4). À la figure 3.5, la structure correspond à une résonance 2 : 1, c'est-à-dire la période orbitale du satellite est deux fois plus grande que la période de rotation de l'ellipsoïde sur lui-même. Notons que ces structures ne sont pas liées aux ellipsoïdes de Jacobi (voir Chandrasekhar 1969).

Ces cartes montrent que l'indicateur de chaos MEGNO est bien adapté pour détecter des orbites périodiques stables résonantes et pas seulement des mouvements chaotiques. Cela montre aussi que les courbes de résonance dans les cartes  $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$  présentent une géométrie particulière. Nous avons vérifié grâce à l'analyse en fréquence (en plus court FMA ou encore NAFF) de Laskar (1990, 1993, 1999) que ces courbes correspondaient bien à ces résonances. Les résultats sont identiques aux cartes de MEGNO. Les prochaines sections sont dédiées à l'explication de l'origine et de la structure de ces courbes. Puisque nous nous intéressons aux orbites périodiques stables et pas aux orbites chaotiques, nous considérons uniquement des astéroïdes à rotation faible pour éviter les zones chaotiques.

### 3.4 Un modèle simplifié pour le potentiel

Afin de comprendre les structures, une formulation explicite du potentiel est nécessaire. Nous proposons un développement simple de ce potentiel par rapport aux deux paramètres  $\frac{h}{\lambda_1}$  et  $\frac{k}{\lambda_1}$  (où  $h$  et  $k$  sont définis à l'équation (1.8) et  $\lambda_1$ , la première coordonnée elliptique du satellite, est définie à la section 1.2). Ces paramètres, de l'ordre de grandeur de  $\frac{h}{R}$  et  $\frac{k}{R}$ , sont petits pour des orbites du secondaire raisonnablement éloignées du primaire. Ce développement n'est autre qu'une troncature du potentiel après les premiers harmoniques  $J_2$  et  $C_{22}$ . Nous préférons cette formulation en  $\frac{h}{R}$  et  $\frac{k}{R}$  à d'autres formulations parce qu'elle est directement connectée à la distance à la sphère et à la distance entre le satellite et l'astéroïde et peut donc être modifiée par ces deux quantités.

Introduisons les coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  correspondant à la position du petit corps dans le repère tournant lié à l'ellipsoïde. Les axes sont ceux de l'ellipsoïde et l'origine est le centre de masse de l'astéroïde.

Nous réécrivons le potentiel  $V$  donné par l'équation (1.11) :

$$V(x_1, x_2, x_3) = -\frac{3}{2}\mu (I_1 - x_1^2 I_2 - x_2^2 I_3 - x_3^2 I_4) \quad (3.1)$$

avec

$$I_1 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} (s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} (s^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} ds \quad (3.2)$$

$$I_2 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} (s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} (s^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} s^{-2} ds \quad (3.3)$$

$$I_3 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} (s^2 - h^2)^{-\frac{3}{2}} (s^2 - k^2)^{-\frac{1}{2}} ds \quad (3.4)$$

$$I_4 = \int_{\lambda_1}^{+\infty} (s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} (s^2 - k^2)^{-\frac{3}{2}} ds. \quad (3.5)$$

On considère que  $\frac{h}{s}$  et  $\frac{k}{s}$  sont petits. Nous développons donc les intégrales  $I_j$  en fonction de ces petites quantités :

$$I_1 \simeq S_2 + \frac{1}{2} (h^2 + k^2) S_4 \quad (3.6)$$

$$I_2 \simeq S_4 + \frac{1}{2} (h^2 + k^2) S_6 \quad (3.7)$$

$$I_3 \simeq S_4 + \frac{1}{2} (3h^2 + k^2) S_6 \quad (3.8)$$

$$I_4 \simeq S_4 + \frac{1}{2} (h^2 + 3k^2) S_6 \quad (3.9)$$

avec  $S_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ ,  $S_4 = \frac{1}{3\lambda_1^3}$  et  $S_6 = \frac{1}{5\lambda_1^5}$ .  $\lambda_1$  est donné par (1.9) et peut être calculé avec la même précision que les intégrales :

$$\lambda_1 \simeq \frac{R}{2} \left( 2 + \frac{x_2^2 h^2}{R^4} + \frac{x_3^2 k^2}{R^4} \right), \quad (3.10)$$

avec  $R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ . Après quelques manipulations et troncatures, le modèle simplifié s'écrit :

$$V(x_1, x_2, x_3) \simeq -\frac{\mu}{R} - \frac{\mu}{10 R^3} (h^2 + k^2) + \frac{3\mu}{10 R^5} (x_2^2 h^2 + x_3^2 k^2). \quad (3.11)$$

Introduisons maintenant un autre repère de référence, fixe cette fois-ci, et notons  $(x, y, z)$  les coordonnées du petit corps dans ce repère. Nous supposons que l'ellipsoïde est en rotation autour de son plus petit axe avec une vitesse de rotation constante  $\nu$ . La relation entre  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $(x, y, z)$  est donnée par :

$$\begin{cases} x_1 &= x \cos \phi + y \sin \phi \\ x_2 &= -x \sin \phi + y \cos \phi \\ x_3 &= z \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $\phi = \nu t + \phi_0$ , l'angle sidéral de l'ellipsoïde.

La formulation Hamiltonienne pour la dynamique du petit corps est :

$$H = -\frac{\mu}{2a} + \mathcal{U}(x, y, z) \quad (3.13)$$

où  $a$  est le demi-grand axe et

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x, y, z) &= V(x_1, x_2, x_3) + \frac{\mu}{R}, \\ &\simeq -\frac{\mu}{10 R^3} (h^2 + k^2) + \frac{3\mu}{10 R^5} \left( (-x \sin \phi + y \cos \phi)^2 h^2 + z^2 k^2 \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Afin de garder un système autonome, nous considérons  $\phi$  comme une nouvelle variable et nous lui associons un moment  $\Phi$  dans l'Hamiltonien, noté maintenant  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} + \nu \Phi + \mathcal{U}(x, y, z, \phi). \quad (3.15)$$

Nous écrivons à présent les coordonnées  $(x, y, z)$  en fonction des éléments orbitaux du satellite :  $a$  le demi-grand axe,  $e$  l'excentricité,  $i$  l'inclinaison,  $\Omega$  la longitude du nœud ascendant,  $\omega$  l'argument du péricentre et  $f$  l'anomalie vraie :

$$\begin{cases} x &= R \left( \cos(\omega + f) \cos \Omega - \cos i \sin(\omega + f) \sin \Omega \right), \\ y &= R \left( \cos(\omega + f) \sin \Omega + \cos i \sin(\omega + f) \cos \Omega \right), \\ z &= R \sin i \sin(\omega + f). \end{cases} \quad (3.16)$$

En utilisant le fait que :

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (3.17)$$

et en définissant :

$$X = \frac{(1 + e \cos f)^3}{(1 - e^2)^3}, \quad (3.18)$$

$$\eta = \frac{x_2}{R} = \cos(\omega + f) \sin(\Omega - \phi) + \cos i \sin(\omega + f) \cos(\Omega - \phi), \quad (3.19)$$

$$\zeta = \frac{x_3}{R} = \sin i \sin(\omega + f), \quad (3.20)$$

$\mathcal{H}$  est exprimé en fonction des éléments orbitaux par :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu}{2a} + \nu \Phi - \frac{\mu}{10 a^3} X (h^2 + k^2) + \frac{3\mu}{10 a^3} X (\eta^2 h^2 + \zeta^2 k^2). \quad (3.21)$$

Les trois quantités  $X$ ,  $\eta$  et  $\zeta$  sont exprimées en fonction de  $e$  et  $M$ , l'anomalie moyenne, jusqu'à un certain ordre par les formules classiques.

Nous associons enfin à  $\mathcal{H}$  le jeu de variables et moments canoniques de Delaunay :

$$\begin{array}{ll}
 M &= \text{anomalie moyenne} & L = \sqrt{\mu a}, \\
 \omega &= \text{argument du péricentre} & G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}, \\
 \Omega &= \text{nœud ascendant} & H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i, \\
 \phi &= \nu t + \phi_0 & \Phi.
 \end{array} \quad (3.22)$$

Le développement (3.21) est particularisé pour les résonances 1 : 1 et 2 : 1 dans les sections suivantes. Il n'est pas adapté à la résonance 5 : 1 du système Ida-Dactyl parce qu'il ne possède pas les coefficients des harmoniques sphériques impairs (en particulier ceux de degré 5).

Comparons à présent les résultats obtenus par le potentiel simplifié (3.11) aux résultats obtenus avec le potentiel complet (1.11). La figure 3.6 présente des cartes de MEGNO réalisées avec ces deux potentiels. Les cartes supérieures correspondent à un satellite en révolution autour d'un astéroïde à rotation lente et les cartes inférieures à un satellite plus proche tournant autour d'un astéroïde à rotation rapide (tous les deux en résonance 1 : 1). Les résultats sont relativement similaires dans les deux cas, surtout pour les cartes supérieures (parce que le satellite est plus loin). La table 3.1 présente les erreurs relatives moyennes sur la distance entre le centre de l'ellipsoïde et le satellite et sur la valeur finale du MEGNO pour les simulations faites avec les potentiels complet et simplifié en quelques points de la résonance 1 : 1 d'un astéroïde en rotation lente. Même si nous observons une déficience du modèle simplifié, surtout pour des ellipsoïdes très allongés ( $b = c = 250$  km et  $b = 250$  km,  $c = 125$  km), les cartes de la figure 3.6 montrent que, qualitativement, le modèle est cohérent<sup>5</sup>. En termes de temps d'exécution, les simulations obtenues avec le potentiel simplifié sont de 3.5 à 4 fois plus rapides que celles faites avec le potentiel complet.

Dans la suite, nous présenterons des cartes de MEGNO réalisées avec le potentiel complet (1.11) et nous identifierons sur celles-ci les courbes calculées grâce au potentiel simplifié.

### 3.5 La résonance 1 : 1

La première résonance que nous allons analyser est le cas synchrone (équivalent à une orbite géostationnaire) ; introduisons l'angle résonant  $\sigma = M +$

---

5. L'évaluation des erreurs maximales commises sur la valeur finale du MEGNO entre ces cartes ne donne pas de résultats exploitables. En effet, le MEGNO ne converge pas vers 2 pour les orbites entourant la résonance avec la même rapidité pour les deux potentiels. Cela signifie que des orbites proches du centre de la résonance peuvent avoir des valeurs du MEGNO encore très faibles (proches de 0) avec un modèle et plus proche de 2 avec l'autre modèle. Ceci pourrait être évité en intégrant jusqu'à la convergence vers 2 du MEGNO pour toutes les orbites non-périodiques.

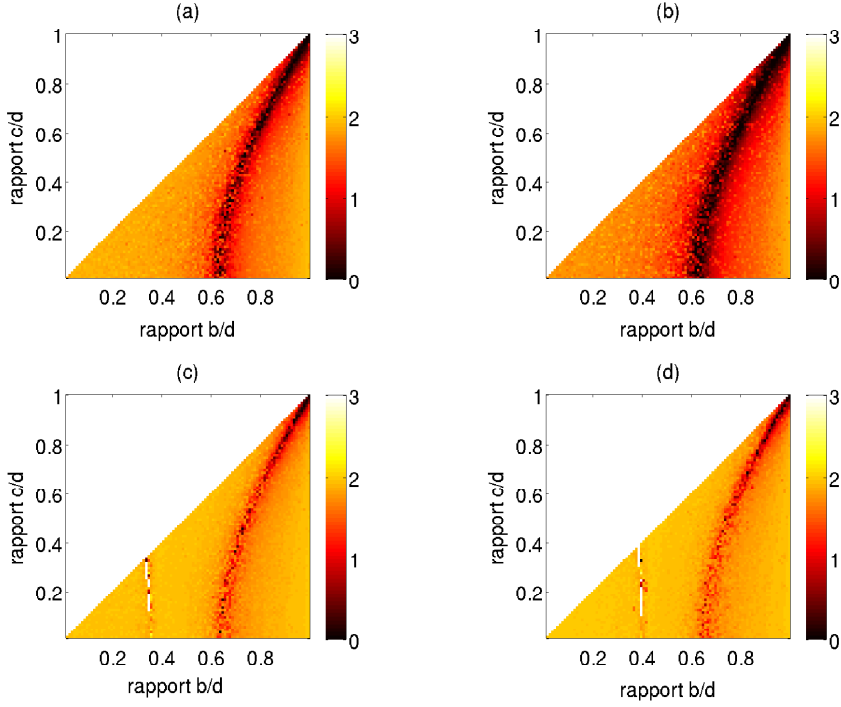


FIGURE 3.6 – Carte de MEGNO obtenues en utilisant (1.11) pour les cartes de gauche et (3.11) pour les cartes de droite. Les cartes supérieures correspondent à la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0.15$ . La période de rotation du primaire sur lui-même est de 43.63 h et le demi-grand axe initial de l'orbite du satellite est  $a_0 = 3521.616$  km. Le temps d'intégration est de 100 ans. Les cartes inférieures correspondent à la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0.15$ . La période de rotation du primaire sur lui-même est de 18.67 h et le demi-grand axe initial de l'orbite du satellite est  $a_0 = 2000$  km. Le temps d'intégration est de 50 ans. Pour toutes les simulations, les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ .

$\omega + \Omega - \phi$ . Nous utilisons les variables de Poincaré en appliquant le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}
 \sigma &= M + \omega + \Omega - \phi & L \\
 p &= -\omega - \Omega & S = L - G \\
 q &= -\Omega & T = G - H \\
 \phi & & \lambda = \Phi + L.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Nous obtenons un Hamiltonien à 4 degrés de liberté. Nous moyennisons sur la variable rapide  $\phi$  afin d'obtenir un Hamiltonien à 3 degrés de liberté  $\bar{H}$  en

TABLE 3.1 – Erreurs relatives moyennes sur la distance entre le centre de l'ellipsoïde et le satellite et sur le MEGNO de tests numériques comparant le potentiel complet au potentiel simplifié (avec un intégrateur Runge-Kutta d'ordre 4 à pas fixe). La période de rotation de l'astéroïde est de 43.633 h, le temps d'intégration est de 10 ans et les conditions initiales sont  $a_0 = 3521.616$  km,  $e_0 = 0.0$ ,  $i_0 = 45^\circ$ ,  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ .

b (km)	c (km)	Erreur relative moyenne sur	
		Distance	MEGNO final
500	450	$5.8855 \times 10^{-5}$	$2.5946 \times 10^{-6}$
500	250	$1.2897 \times 10^{-4}$	$4.3630 \times 10^{-4}$
500	125	$2.3951 \times 10^{-4}$	$7.9701 \times 10^{-3}$
250	250	$6.7298 \times 10^{-3}$	$4.1714 \times 10^{-2}$
125	125	$9.7532 \times 10^{-3}$	$4.2841 \times 10^{-2}$

les variables  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{q}$  et moments  $\bar{L}$ ,  $\bar{S}$ ,  $\bar{T}$  (le terme constant contenant  $\bar{\lambda}$  est éliminé) :

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{\sigma}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{L}, \bar{S}, \bar{T}) = -\frac{\mu^2}{2\bar{L}^2} - \nu \bar{L} - \frac{\mu^4}{10 \bar{L}^6} \bar{X} (h^2 + k^2) + \frac{3\mu^4}{10 \bar{L}^6} (\bar{A}h^2 + \bar{B}k^2). \quad (3.24)$$

La fonction  $\bar{X}$  dépend de  $\bar{e}$  (ce qui signifie de  $\bar{L}$  et  $\bar{S}$ ) ; par exemple, pour un développement du second ordre en excentricité, elle vaut simplement  $1 + \frac{3}{2}\bar{e}^2$ . Les fonctions  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  correspondent aux valeurs moyennes de  $X\eta^2$  et  $X\zeta^2$  ; elles dépendent toutes les deux de  $\bar{e}$  et  $\bar{i}$  (ce qui signifie de  $\bar{L}$ ,  $\bar{S}$  et  $\bar{T}$ ) et  $\bar{A}$  dépend de trois angles  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$ . La dépendance angulaire en  $\bar{A}$  peut être exprimée comme une somme de cosinus de la forme :  $\cos(2i\bar{\sigma} \pm 2j\bar{p} \pm 2k\bar{q})$ , les entiers  $i$ ,  $j$  et  $k$  variant de 0 à une fonction de l'ordre de troncature en excentricité choisi. Les barres dans les variables moyennisées seront omises dans la suite.

Nous allons à présent analyser trois cas simples : le cas équatorial circulaire ( $e = 0$  et  $i = 0^\circ$ ), le cas circulaire ( $e = 0$ ) et le cas équatorial ( $i = 0^\circ$ ).

### 3.5.1 Le cas équatorial circulaire

Si nous considérons  $e = 0$  et  $i = 0^\circ$ , les fonctions  $\bar{X}$ ,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont réduites à :

$$\bar{X} = 1, \quad (3.25)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma, \quad (3.26)$$

$$\bar{B} = 0. \quad (3.27)$$

Les angles  $p$  et  $q$  ont disparu et l'Hamiltonien résultant est une fonction à 1 degré de liberté similaire à un pendule en résonance :

$$\bar{\mathcal{H}}(\sigma, L) = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \nu L + \frac{\mu^4}{20L^6} (h^2 - 2k^2) - \frac{3\mu^4}{20L^6} h^2 \cos 2\sigma. \quad (3.28)$$

Les équilibres sont donnés par les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial L} = 0. \quad (3.29)$$

La dérivée par rapport à l'angle  $\sigma$  implique que  $\sin 2\sigma = 0$ , ce qui signifie que  $\cos 2\sigma = \pm 1$ , et la dérivée par rapport au moment  $L$  donne :

$$\frac{\mu^2}{L^3} - \nu + \frac{3\mu^4}{10L^7} (2k^2 - h^2 \pm 3h^2) = 0, \quad (3.30)$$

c'est-à-dire, avec  $n = \frac{\mu^2}{L^3}$  le moyen mouvement,

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{5L^7} (k^2 + h^2) = 0, \quad (3.31)$$

et :

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{5L^7} (k^2 - 2h^2) = 0. \quad (3.32)$$

Deux interprétations des équations (3.31) et (3.32) sont possibles : la résonance exacte  $n = \nu$  est atteinte seulement pour certaines formes particulières de l'ellipsoïde satisfaisant  $k^2 = 2h^2$  ou, pour n'importe quelle forme, la position de la résonance exacte correspond à une valeur translatée du demi-grand axe. Cette translation dépend des paramètres  $h$  et  $k$ , et donc de  $b$  et  $c$ . Un exemple de cette translation est présenté à la figure 3.7 pour différentes valeurs de  $\frac{b}{d}$  et  $\frac{c}{d}$  (en utilisant (3.32)). Notons que la résonance 1 : 1, dans le cas sphérique, ne joue pas un grand rôle dans le mouvement du satellite (ce n'est pas vraiment une résonance mais seulement une commensurabilité), mais est présentée ici comme une référence.

Les courbes (3.31) et (3.32), avec  $n = \nu$ , correspondent à

$$\frac{b^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2} = 2 \quad (3.33)$$

et

$$2\frac{b^2}{d^2} - \frac{c^2}{d^2} = 1. \quad (3.34)$$

Les deux courbes contiennent le cas sphérique ( $d = b = c$ ). L'équilibre (3.33) représente des équilibres linéairement instables (appelés *points hyperboliques* dans Scheeres (1994)) et correspond à une ellipse en dehors des limites des cartes, à savoir  $0 \leq \frac{b}{d} \leq 1$  et  $0 \leq \frac{c}{d} \leq 1$ . L'équilibre (3.34) représente les

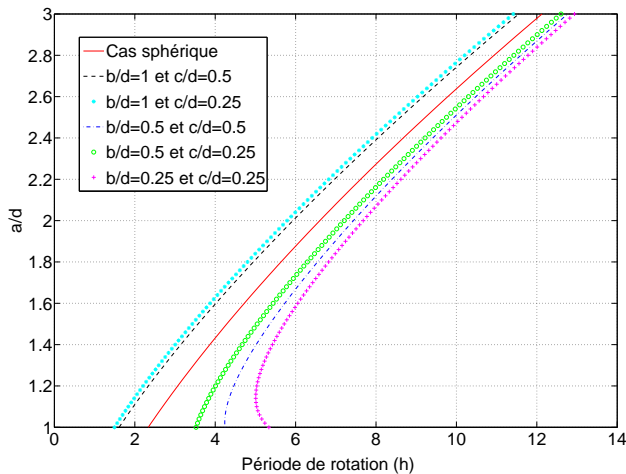


FIGURE 3.7 – Translation du demi-grand axe  $a$  (normalisé par  $d$ ) du satellite par rapport à la valeur de la période de rotation et à  $\frac{b}{d}$  et  $\frac{c}{d}$  pour la résonance 1 : 1 dans le cas équatorial circulaire (équation (3.32)).

points d'équilibre centraux et correspond à la courbe visible sur la figure 3.8. Le pied de l'hyperbole (l'intersection de l'hyperbole avec l'axe  $\frac{b}{d}$ ) est situé à  $\frac{b}{d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707$ . Remarquons que les points d'équilibre centraux correspondent à  $\cos(2\sigma) = -1$ , c'est-à-dire  $\lambda - \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$  et sont stables sur nos figures parce que les ellipsoïdes sont de type I.

La figure 3.9 présente la différence entre les valeurs maximales et minimales de l'angle résonant  $\sigma$  par rapport à la valeur de  $\frac{b}{d}$ , avec  $\frac{c}{d}$  fixé à 0.2, pour la résonance 1 : 1 dans le cas équatorial circulaire. Nous pouvons voir que, lorsque  $\frac{b}{d} \simeq 0.72$ , cette différence est nulle, ce qui signifie que l'angle résonant est constant. Nous concluons grâce à ce graphe (et ça a été confirmé par des tests numériques) que l'angle  $\sigma$  est en libration pour des valeurs de  $\frac{b}{d}$  plus petites qu'à peu près 0.999. Cela signifie que, sur la ligne horizontale de la figure 3.8 définie par  $\frac{c}{d} = 0.2$ , presque tous les points correspondent à des orbites en résonance 1 : 1 stables. L'hyperbole correspond au centre de la résonance.



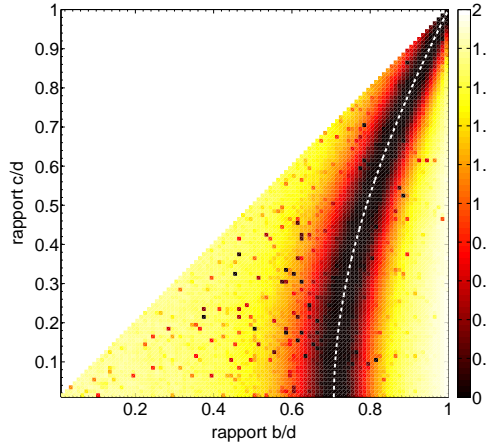


FIGURE 3.8 – Carte de MEGNO de la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et  $e_0 = 0$ . La période de rotation du primaire est de 43.63 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 3521.616$  km. Le temps d'intégration est de 100 ans. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ . La ligne en pointillé correspond à la prévision analytique de la courbe (3.34).

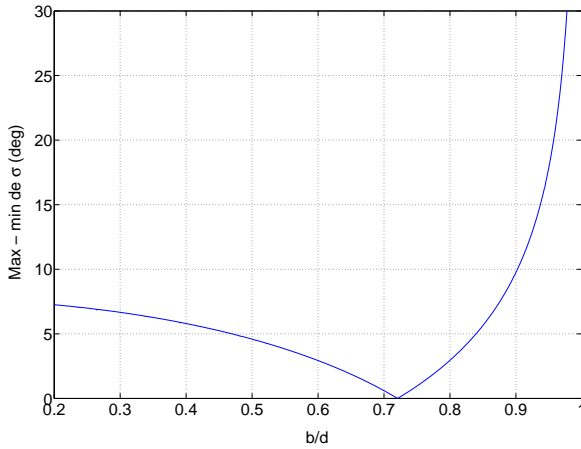


FIGURE 3.9 – Différence entre les valeurs maximale et minimale de l'angle résonant  $\sigma$  par rapport à la valeur de  $\frac{b}{d}$ , avec  $\frac{c}{d}$  fixée à 0.2, pour la résonance 1 : 1 dans le cas équatorial circulaire. Les conditions initiales sont les mêmes que pour la figure 3.8 et le temps d'intégration est de 50 ans. Notons que la période de l'angle  $\sigma$  est plus petite que 0.5 ans pour tous les points.

### 3.5.2 Le cas circulaire

Si nous réintroduisons l'inclinaison  $i$  dans les fonctions  $\bar{X}$ ,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  (en supposant de nouveau que  $e = 0$ ), elles deviennent :

$$\bar{X} = 1, \quad (3.35)$$

$$\bar{A} = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 2i\right) - \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{4} \cos i + \frac{1}{16} \cos 2i\right) \cos 2\sigma, \quad (3.36)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2i. \quad (3.37)$$

L'Hamiltonien résultant est une fonction à 1 degré de liberté similaire à un pendule en résonance :

$$\bar{\mathcal{H}}(\sigma, L) = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \nu L - \frac{\mu^4}{10L^6} (h^2 + k^2) - \frac{3\mu^4}{10L^6} (\bar{A} h^2 + \bar{B} k^2) \quad (3.38)$$

où  $\cos i = 1 - \frac{T}{L}$ ,  $\cos 2i = 1 - \frac{4T}{L} + 2\frac{T^2}{L^2}$  et  $T$  est une constante.

Les équilibres apparaissent de nouveau lorsque  $\sin 2\sigma = 0$  ou  $\cos 2\sigma = \pm 1$ , et la dérivée par rapport au moment  $L$  donne :

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{80L^7} \left( 4(2k^2 - h^2)(1 - \cos i + 2 \cos 2i) \pm 3h^2(3 + 4 \cos i + \cos 2i) \right) = 0, \quad (3.39)$$

c'est-à-dire :

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{80L^7} \left( h^2(5 + 16 \cos i - 5 \cos 2i) + 8k^2(1 - \cos i + 2 \cos 2i) \right) = 0 \quad (3.40)$$

et :

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{80L^7} \left( h^2(-13 - 8 \cos i - 11 \cos 2i) + 8k^2(1 - \cos i + 2 \cos 2i) \right) = 0. \quad (3.41)$$

La résonance exacte  $n = \nu$  est atteinte pour des formes particulières d'ellipsoïde satisfaisant (3.40) ou (3.41). La courbe (3.40), obtenue avec  $\cos 2\sigma = 1$ , correspond aux points hyperboliques qui sont instables et non visibles dans notre domaine ( $0 \leq \frac{c}{d} \leq \frac{b}{d} \leq 1$ ). La courbe (3.41), obtenue avec  $\cos 2\sigma = -1$ , correspond aux équilibres centraux stables et se trouve dans le plan  $(\frac{b}{d}, \frac{c}{d})$  :

$$5 + 16 \cos i - 5 \cos 2i = (13 + 8 \cos i + 11 \cos 2i) \left(\frac{b}{d}\right)^2 - 8(1 - \cos i + 2 \cos 2i) \left(\frac{c}{d}\right)^2. \quad (3.42)$$

Cette courbe dépend de la valeur de l'inclinaison (les valeurs critiques données ici sont des valeurs approchées) :

- pour  $0^\circ \leq i \leq 50^\circ$ , la courbe est une hyperbole gauche - droite dont la partie droite a une intersection avec l'axe  $\frac{b}{a}$ , que l'on appellera le pied, augmentant avec l'inclinaison selon :

$$u = \sqrt{\frac{5 + 16 \cos i - 5 \cos 2i}{13 + 8 \cos i + 11 \cos 2i}}. \quad (3.43)$$

Les valeurs de ce pied sont tracées sur la figure 3.10.

- pour  $50^\circ \leq i \leq 113^\circ$ , la courbe est une ellipse (en dehors du domaine).
- pour  $113^\circ \leq i \leq 118^\circ$ , la courbe est une hyperbole gauche - droite avec la même intersection qu'au-dessus.
- pour  $118^\circ \leq i \leq 180^\circ$ , la courbe est une hyperbole haut - bas (en dehors du domaine).

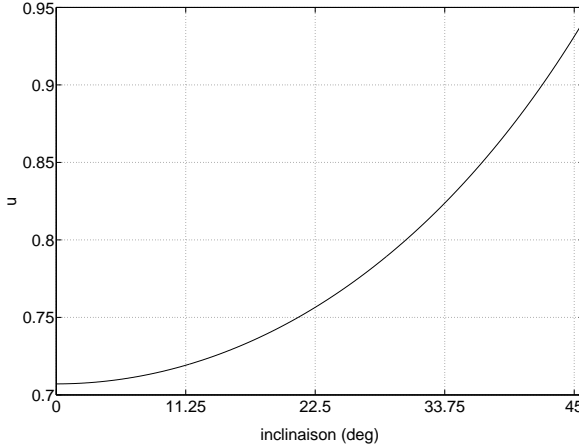


FIGURE 3.10 – Tracé du pied  $u$  de l'hyperbole (3.42) donné par (3.43) dans le cas de la résonance 1 : 1 avec  $e = 0$ .

Les quatre cas illustrés sur la figure 3.11 sont obtenus respectivement avec  $i_0 = 0^\circ, 11.25^\circ, 22.5^\circ$  et  $33.75^\circ$ . Comme vous pouvez le voir, les courbes précédentes (3.42) épousent bien la résonance, spécialement pour de faibles valeurs de l'inclinaison.

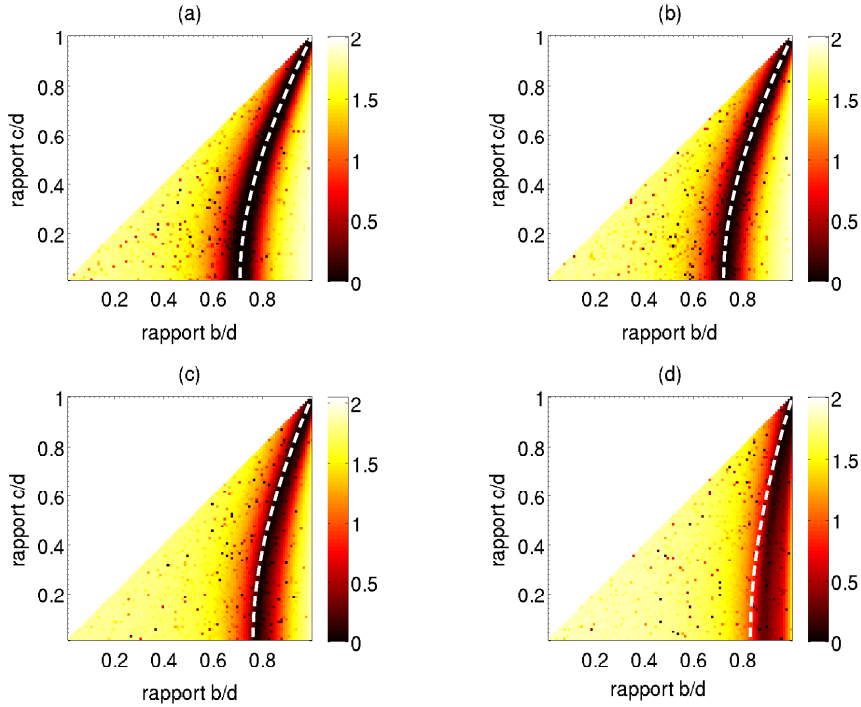


FIGURE 3.11 – Cartes de MEGNO de la résonance 1 : 1 avec respectivement  $i_0 = 0^\circ, 11.25^\circ, 22.5^\circ$  et  $33.75^\circ$ . La période de rotation du primaire vaut 43.63 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 3521.616$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est 100 ans et la ligne en pointillé correspond à la prévision analytique de la courbe (3.42).

### 3.5.3 Le cas équatorial

Si nous reprenons l'équation (3.24), en considérant que  $i = 0^\circ$ , nous obtenons un Hamiltonien à 1 degré de liberté :

$$\bar{\mathcal{H}}(\sigma, L) = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \nu L - \frac{\mu^4}{10L^6} \bar{X} (h^2 + k^2) - \frac{3\mu^4}{10L^6} (\bar{A} h^2 + \bar{B} k^2) \quad (3.44)$$

avec :

$$\bar{X} = 1 + \frac{3}{2}e^2, \quad (3.45)$$

$$\bar{A} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\sigma + e^2 \left( \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \cos 2\sigma \right), \quad (3.46)$$

$$\bar{B} = 0, \quad (3.47)$$

où  $e^2 \simeq \frac{2S}{L}$  et  $S$  est une constante.

Les équilibres apparaissent de nouveau pour  $\cos 2\sigma = \pm 1$  et la dérivée par rapport au moment  $L$  donne :

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{20L^7} \left( h^2(4 - 21e^2) + k^2(4 + 7e^2) \right) = 0 \quad (3.48)$$

et

$$n - \nu + \frac{3\mu^4}{20L^7} \left( 2h^2(-4 + 7e^2) + k^2(4 + 7e^2) \right) = 0 \quad (3.49)$$

La courbe (3.48) est un équilibre instable non visible dans notre domaine ( $0 \leq \frac{c}{d} \leq \frac{b}{d} \leq 1$ ). La courbe (3.49) dépend de la valeur de l'excentricité. Appelons  $e_1$  et  $e_2$  les valeurs de l'excentricité ( $e_1 < e_2$ ) définies par :

$$-4 + 21e_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad -4 + 7e_2^2 = 0, \quad (3.50)$$

c'est-à-dire  $e_1 = 0.436$  et  $e_2 = 0.756$ . La courbe (3.49), obtenue avec  $\cos 2\sigma = -1$  et tracée sur la figure 3.12, correspond à :

- une hyperbole gauche - droite avec une intersection avec l'axe  $\frac{b}{d}$  diminuant avec l'excentricité selon :

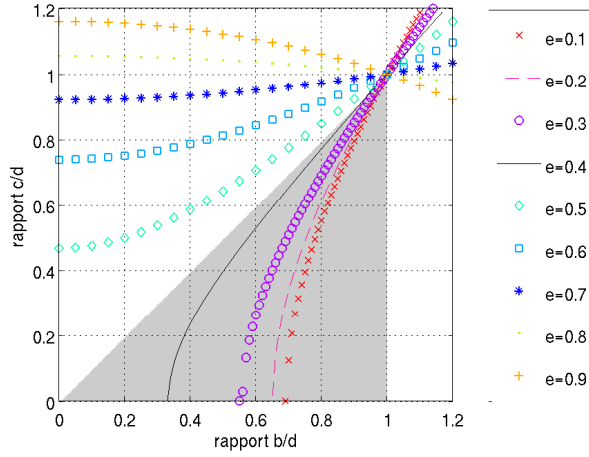
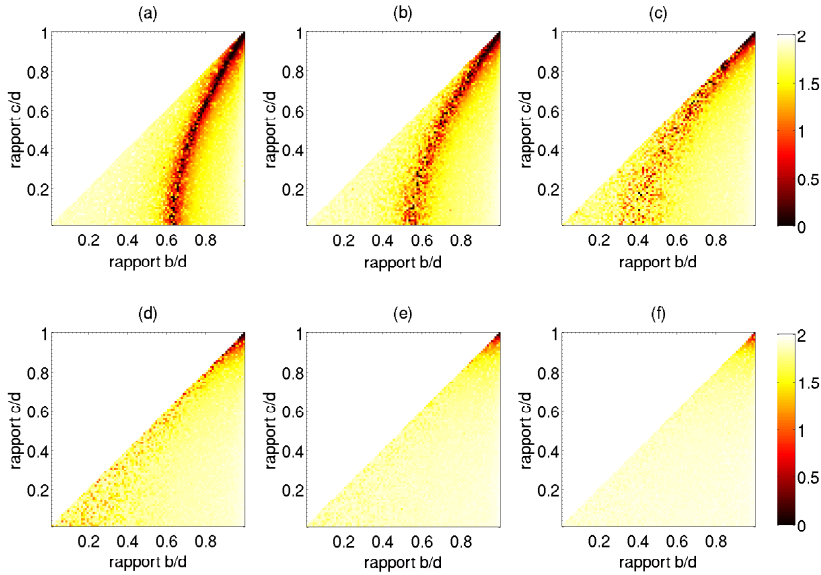
$$\frac{b}{d} = \sqrt{\frac{-4 + 21e^2}{-8 + 14e^2}} \quad (3.51)$$

si  $e \leq e_1$ ,

- une hyperbole haut - bas (en dehors du domaine) si  $e_1 \leq e \leq e_2$ ,
- une ellipse (en dehors du domaine) si  $e \geq e_2$ .

Sur la figure 3.13, des cartes de MEGNO sont présentées pour différentes valeurs de l'excentricité ( $e_0 = 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$  et  $0.40$ ). Nous voyons clairement la transition depuis l'hyperbole gauche - droite (avec un pied se déplaçant vers la gauche) vers l'hyperbole haut - bas surtout visible dans les deux dernières cartes. Le passage de l'hyperbole gauche - droite à l'hyperbole haut - bas ne se passe pas exactement quand  $e_0 = e_1$ .

Ceci peut s'expliquer par le fait que notre modèle a été tronqué à l'ordre 2 en excentricité et en degré et ordre du développement en harmoniques sphériques. Cependant, ce modèle, facile à manipuler, est utile afin d'expliquer la nature des courbes de la figure 3.13 et leur disparition pour certaines valeurs de l'excentricité.

FIGURE 3.12 – Courbe (3.49) pour différentes valeurs de l'excentricité  $e$ .FIGURE 3.13 – Cartes de MEGNO de la résonance 1 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et de gauche à droite, de haut en bas,  $e_0 = 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$  et  $0.40$ . La période de rotation du primaire vaut 43.63 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 3521.616$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = \omega_0 = 0^\circ$  et  $M_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est de 100 ans.

## 3.6 La résonance 2 : 1

### 3.6.1 Équilibres de la résonance 2 : 1

Considérons maintenant la résonance 2 : 1, ce qui signifie que le satellite orbite autour de l'astéroïde avec une période orbitale double de la période de spin de l'astéroïde (l'équivalent d'une orbite autour de la Terre d'une période de 48 heures).

Afin de connaître les limites de notre modèle pour cette résonance, nous identifions les coefficients du développement en harmoniques sphériques concernés. Le potentiel gravitationnel, développé en harmoniques sphériques, (1.6) s'écrit aussi à l'aide des éléments orbitaux  $(a, e, i, \Omega, \omega, M)$  et du temps sidéral  $\theta$  (Kaula, 1966) :

$$V = -\frac{GM}{r} + \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{GM}{a} \left(\frac{R_0}{a}\right)^n F_{nmp}(i) G_{npq}(e) S_{nmpq}(\Omega, \omega, M, \theta),$$

où les fonctions  $S_{nmpq}(\Omega, \omega, M, \theta)$  dépendent des coefficients  $C_{n,m}$  et  $S_{n,m}$ ,  $F_{nmp}(i)$  est la fonction d'inclinaison et  $G_{npq}(e)$  est la fonction d'excentricité. Ces fonctions sont définies en détail dans (Kaula, 1966) et dans (Delsate, 2011). La résonance gravitationnelle 2 : 1 apparaît pour la première fois dans le développement en harmoniques pour des orbites circulaires avec les coefficients  $C_{41}$  et  $C_{42}$  et pour des orbites elliptiques avec  $e C_{31}$ ,  $e C_{32}$  ou  $e^2 C_{22}$ . Le potentiel de Mac Millan contient seulement  $C_{42}$  et  $C_{22}$  et notre modèle simplifié seulement  $C_{22}$ . Cette analyse n'est donc valide que pour un astéroïde avec de petits coefficients  $C_{41}$ ,  $C_{31}$  et  $C_{32}$  (ce qui est souvent le cas) et pour  $C_{42} \leq e^2 C_{22}$ , ce qui est raisonnable pour des excentricités jusqu'à environ 0.3.

Nous introduisons l'angle résonant  $\sigma = M + \omega + \Omega - \frac{1}{2}\phi$  et nous appliquons le changement de variables canonique :

$$\begin{aligned} \sigma &= M + \omega + \Omega - \frac{1}{2}\phi & L \\ p &= -\omega - \Omega & S = L - G \\ q &= -\Omega & T = G - H \\ \phi &= \nu t + \phi_0 & \lambda = \Phi + \frac{1}{2}L \end{aligned} \tag{3.52}$$

Nous obtenons de nouveau un Hamiltonien à 4 degrés de liberté et nous moyennisons sur la variable rapide  $\phi$  afin d'obtenir un Hamiltonien moyennisé à 3 degrés de liberté  $\bar{H}$  (le terme constant contenant  $\bar{\lambda}$  est enlevé). L'Hamiltonien a l'expression :

$$\bar{\mathcal{H}}(\bar{\sigma}, \bar{q}, \bar{p}, \bar{L}, \bar{T}, \bar{S}) = -\frac{\mu^2}{2\bar{L}^2} - \nu \frac{\bar{L}}{2} - \frac{\mu^4}{10\bar{L}^6} \bar{X} (h^2 + k^2) + \frac{3\mu^4}{10\bar{L}^6} (\bar{A}h^2 + \bar{B}k^2), \tag{3.53}$$

où les fonctions  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  correspondent, comme précédemment, aux valeurs moyennes de  $X \eta^2$  et  $X \zeta^2$ .

Dans le cas général, les équilibres correspondants sont donnés par les six équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \sigma} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} = 0, \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial L} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial T} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial S} = 0. \quad (3.55)$$

Les barres sur les variables moyennisées seront omises dans la suite. Les trois dérivées par rapport aux angles (3.54) montrent que les équilibres apparaissent lorsque  $\sin 2\sigma = 0$ ,  $\sin 2q = 0$  et  $\sin 2p = 0$ . Analysons à présent un cas particulier pour lequel le modèle devient plus simple.

### 3.6.2 Le cas tronqué équatorial

Dans notre modèle simplifié, la résonance 2 : 1 n'est pas présente dans le cas tronqué circulaire; tronquons alors l'Hamiltonien au second ordre de l'excentricité. Dans ce cas, les fonctions  $\bar{X}$ ,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont données par :

$$\bar{X} = 1 + \frac{3}{2} e^2, \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cos 2i + \frac{9}{16} e^2 + \frac{3}{16} e^2 \cos 2i - \frac{51}{32} e^2 \cos (2p + 4\sigma) \\ & - \frac{17}{8} e^2 \cos i \cos (2p + 4\sigma) - \frac{17}{32} e^2 \cos 2i \cos (2p + 4\sigma), \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2i + \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{8} e^2 \cos 2i. \quad (3.58)$$

Remarquons que le seul angle encore présent est  $2p + 4\sigma$ . Nous modifions donc le jeu de variables canoniques pour obtenir un problème à 1 degré de liberté  $(\psi, L)$  :

$$\begin{aligned} \psi &= \sigma + \frac{p}{2} & L & \\ p & & F &= S - \frac{L}{2}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

les moments  $T$  et  $F$  étant constants.

Si nous supposons que  $i = 0^\circ$ , alors  $\bar{B} = 0$  et  $\bar{A}$  s'écrit :

$$\bar{A} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 - \frac{17}{4} e^2 \cos (4\psi). \quad (3.60)$$

Les équilibres sont donnés par :

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial L} = 0. \quad (3.61)$$



Ils correspondent à  $\sin 4\psi = 0$  et

$$\frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\nu}{2} + \frac{3\mu^4}{10L^7} f(h, k, \cos 4\psi, e^2) = 0 \quad (3.62)$$

où  $f$  est une fonction dépendant de  $h, k, \psi$  et  $e$ , dans laquelle nous avons inséré la dérivée de  $e^2$  par rapport à  $L$ , tronquée elle aussi à l'ordre 2 en  $e$ , ce qui signifie :

$$\frac{\partial e^2}{\partial L} \simeq \frac{1}{L} \left(1 - \frac{3}{2} e^2\right). \quad (3.63)$$

Pour  $\cos 4\psi = 1$ , nous obtenons :

$$-\frac{7}{2} + \frac{135}{4} e^2 = \left(-5 + 30 e^2\right) \frac{b^2}{d^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4} e^2\right) \frac{c^2}{d^2} \quad (3.64)$$

et pour  $\cos 4\psi = -1$  :

$$5 - 30 e^2 = \left(\frac{7}{2} - \frac{135}{4} e^2\right) \frac{b^2}{d^2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{15}{4} e^2\right) \frac{c^2}{d^2}. \quad (3.65)$$

Appelons  $e_1$  et  $e_2$  les valeurs de l'excentricité ( $e_1 < e_2$ ) définies par :

$$\frac{7}{2} - \frac{135}{4} e_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad 5 - 30 e_2^2 = 0 \quad (3.66)$$

où numériquement  $e_1 = 0.322$  et  $e_2 = 0.408$ .

Si  $\cos 4\psi = 1$ , l'équilibre est instable et non visible dans notre domaine ( $0 \leq \frac{c}{d} \leq \frac{b}{d} \leq 1$ ). Si  $\cos 4\psi = -1$ , la résonance 2 : 1 exacte, tracée sur la figure 3.14, est caractérisée par :

- si  $e \leq e_1$  : une ellipse (en dehors du domaine)
- si  $e_1 \leq e \leq e_2$  : une hyperbole haut - bas (en dehors du domaine)
- si  $e \geq e_2$  : une hyperbole gauche - droite avec une intersection avec l'axe  $\frac{b}{d}$  augmentant avec l'excentricité comme :

$$\frac{b}{d} = 2\sqrt{5} \sqrt{\frac{6e^2 - 1}{135e^2 - 14}}. \quad (3.67)$$

La figure 3.15 donne les résultats de l'indicateur MEGNO pour une série d'orbites localisées dans la résonance 2 : 1 et caractérisées par  $e_0 = 0.15, 0.20, 0.30, 0.35, 0.40$  et  $0.45$ . Sur ces cartes, nous voyons clairement le passage de l'ellipse à l'hyperbole. De nouveau, ce changement de comportement ne se passe pas exactement aux valeurs prédites par le modèle, à cause de la troncature en excentricité. Cependant, qualitativement, la théorie donne des résultats similaires aux graphiques.

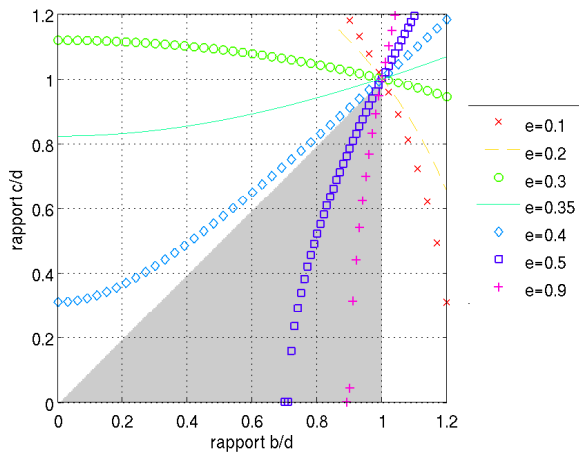


FIGURE 3.14 – Courbe (3.65) pour différentes valeurs de l'excentricité  $e$ .

### 3.7 Conclusion

Nous avons utilisé l'indicateur de chaos MEGNO afin de détecter les résonances gravitationnelles autour d'un astéroïde ellipsoïdal tournant sur lui-même (avec une période de rotation entre 15 et 100 heures). L'ellipsoïde tourne sur lui-même de façon constante autour de son axe le plus court et le potentiel utilisé est le potentiel intégral. Pour certaines valeurs du demi-grand axe du satellite correspondant à ces résonances, des courbes coniques apparaissent dans l'espace  $(\frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ , caractérisées par une très petite valeur du MEGNO. Ces valeurs relatives particulières des demi-grands axes de l'ellipsoïde correspondent à des orbites résonantes périodiques stables.

En utilisant une approximation du potentiel ellipsoïdal, nous avons construit des modèles simplifiés des résonances, réduits à 1 degré de liberté par une moyennisation, des approximations et des troncatures. Les équilibres stables de ces modèles, dans le cas de la résonance exacte, correspondent à des géométries particulières, comme détecté par le MEGNO.

Pour d'autres valeurs de  $\frac{b}{d}$  et  $\frac{c}{d}$  (en dehors des structures coniques), les valeurs résonantes du demi-grand axe sont déplacées d'une quantité dépendant de  $d$ ,  $b$  et  $c$ .

Reprécisons que ce chapitre est une étude académique et que tous les cas analysés ne correspondent pas à des cas réalistes. Seules la partie en haut à droite des cartes de MEGNO correspond à des primaires de forme et de densité raisonnables.

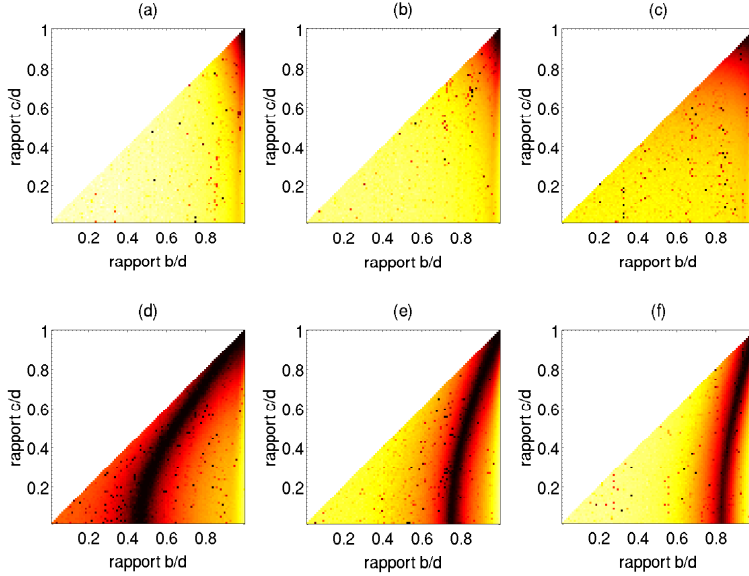


FIGURE 3.15 – Cartes de MEGNO de la résonance 2 : 1 avec  $i_0 = 0^\circ$  et de gauche à droite, de haut en bas,  $e_0 = 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45$ . La période de rotation du primaire vaut 99.733 h et le demi-grand axe initial de l'orbite est  $a_0 = 9700.108$  km. Les angles initiaux sont  $\Omega_0 = M_0 = 0^\circ$  et  $\omega_0 = 90^\circ$ . Le temps d'intégration est de 100 ans.

Cinq points importants peuvent être mis en évidence :

1. L'utilisation du MEGNO comme indicateur de stabilité (en concentrant l'analyse sur des valeurs inférieures à 2 et tendant vers 0) à la place d'un indicateur de chaos est innovante et pionnière et donne de très bons résultats.
2. La recherche de courbes de stabilité résonantes, pour une masse fixée mais pour n'importe quelle forme de l'astéroïde, est intéressante et permet de détecter des géométries particulières donnant les résonances gravitationnelles exactes.
3. L'utilisation d'une approximation pour le potentiel, avec une formulation explicite, donne une explication simple aux courbes coniques apparaissant dans les cartes de MEGNO pour les résonances 1 : 1 et 2 : 1.
4. Les différences entre le modèle complet et le modèle approché sont pe-

tites pour un ellipsoïde proche de la sphère (par exemple  $b/d = 1$  et  $c/d = 0.9$ ) mais augmentent avec la non-sphéricité de l'ellipsoïde (par exemple  $b/d = 0.25$  et  $c/d = 0.25$ ). De plus, elles diminuent lorsque la distance du satellite à l'ellipsoïde augmente. Ce comportement correspond à ce qui était attendu.

5. Le modèle simplifié donne une expression approximée simple du déplacement (depuis la résonance exacte) dû à la forme du corps (ce déplacement augmente avec la non-sphéricité de l'astéroïde) et dû à l'excentricité et à l'inclinaison du satellite.

Après ce chapitre consacré à l'étude des résonances entre un astéroïde et son satellite, tentons à présent de détecter les résonances concernant les systèmes triples.



# Chapitre 4

## Dynamique des astéroïdes triples : l'exemple du système (87) Sylvia

### 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique et de la stabilité du système (87) Sylvia, qui est le premier astéroïde triple découvert (Marchis *et al.* 2005b). Sylvia, détecté pour la première fois en 1866, est un astéroïde de faible excentricité et d'inclinaison moyenne de la ceinture principale extérieure. Son évolution à long terme a été étudiée par le centre virtuel AstDys<sup>1</sup> (Milani et Knežević 1998; Knežević et Milani 2003) qui a fourni ses éléments orbitaux propres<sup>2</sup> ( $\bar{a} = 3.486$  UA,  $\bar{e} = 0.0537$ ,  $\bar{i} = 9.85^\circ$ ) et ses fréquences fondamentales séculaires (le moyen mouvement  $n = 55.297^\circ/\text{an}$ , la fréquence du péricentre  $g = 134.798$  sec/an et la fréquence du nœud ascendant  $s = -130.782$  sec/an). De plus, son orbite a été caractérisée comme légèrement chaotique, avec un temps de Lyapunov de  $\sim 1.4$  million d'années.

Les deux autres corps du système, Romulus et Rémus, présentent des orbites presque circulaires et presque équatoriales. Ils ont un rapport de masse d'environ  $10^{-4}$  et  $10^{-5}$  avec Sylvia, ce qui signifie qu'ils peuvent être considérés comme des satellites. Le satellite externe, Romulus, est à peu près dix fois plus massif que le satellite interne, Rémus, pour un demi-grand axe deux fois plus large. Les éléments orbitaux des satellites et les paramètres physiques du système sont présentés dans la table 4.1. Les incertitudes (lorsqu'elles sont connues) sont aussi données, et les références sont précisées dans la section 2.

---

1. Leur base de données est accessible en ligne à l'adresse <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>

2. Les éléments orbitaux propres sont le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison d'une orbite moyennisés sur les courtes et longues périodes.

<b>Sylvia</b>	
rayon	130.47 km ( $\sigma = 6.65$ )
masse	$1.478 \times 10^{19}$ kg
période de rotation	5.184 h
ascension droite des pôles	$100^\circ$
déclinaison des pôles	$62^\circ$
<b>Rémus</b>	
demi-grand axe	$706 \pm 5$ km
excentricité	$0.016 \pm 0.011$
inclinaison	$2^\circ \pm 1^\circ$
anomalie moyenne	$96.087^\circ$
argument du péricentre	$314^\circ$
longitude du nœud ascendant	$97^\circ$
masse	$2.154 \times 10^{14}$ kg
diamètre	$7 \pm 2$ km
<b>Romulus</b>	
demi-grand axe	$1356 \pm 5$ km
excentricité	$0.001 \pm 0.001$
inclinaison	$1.7^\circ \pm 1^\circ$
anomalie moyenne	$324.308^\circ$
argument du péricentre	$273^\circ$
longitude du nœud ascendant	$101^\circ$
masse	$3.6625 \times 10^{15}$ kg
diamètre	$18 \pm 4$ km

TABLE 4.1 – Éléments orbitaux, paramètres physiques et incertitudes correspondants pour les corps du système.

Winter *et al.* (2009) ont étudié le système et découvert que les satellites pourraient être hautement instables si l’aplatissement de Sylvia (même une petite fraction de sa valeur estimée) n’était pas pris en compte. En effet, l’aplatissement de l’astéroïde, de même que la petite distance entre les satellites et sa surface ( $\sim 5$  et  $10$  rayons de Sylvia), augmentent de façon critique les fréquences de précession et les empêchent d’être en commensurabilité avec les fréquences dues aux autres perturbations gravitationnelles.

Ce chapitre permet de comprendre les mécanismes dynamiques présents dans le système et aux alentours. Nous généraliserons ensuite quelques-uns de nos résultats aux autres systèmes triples, et d’une façon générale, aux systèmes similaires à (87) Sylvia, c’est-à-dire les systèmes avec un petit rapport de masse et dont le diamètre du primaire est de l’ordre de  $\sim 100$  km.

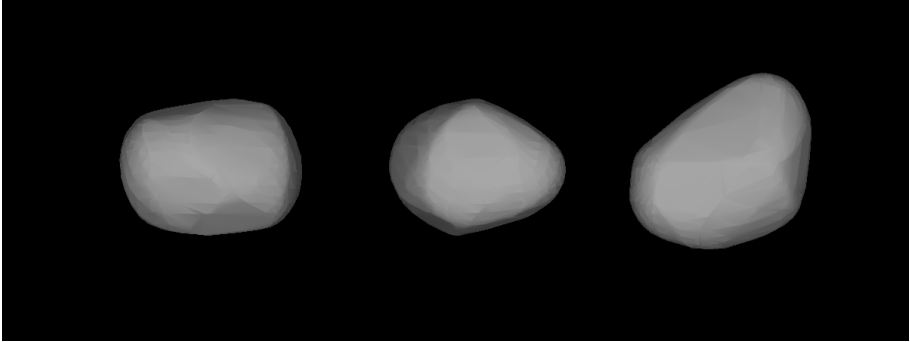


FIGURE 4.1 – Modèle de forme de Sylvia basé sur les observations de Kaasalainen *et al.* (2002); Marchis *et al.* (2006). Cette figure provient de la base de données DAMIT.

Les résultats présentés dans ce chapitre et dans le chapitre suivant ont été réalisés en collaboration avec Julien Frouard et sont publiés dans Frouard et Compère (2012).

## 4.2 Étude du système (87) Sylvia

Le potentiel gravitationnel de Sylvia est modélisé par le développement en harmoniques sphériques (1.6). Les coefficients de ce développement sont calculés en utilisant le logiciel SHTOOLS (voir section 2.4) et le modèle de forme convexe de Sylvia (Kaasalainen *et al.* 2002; Marchis *et al.* 2006) est disponible dans la base de données DAMIT<sup>3</sup>. Celui-ci, présenté à la figure 4.1, est déduit d’une méthode d’inversion basée sur des données photométriques (Kaasalainen *et al.* 2002). Malheureusement, ce genre de données ne contient pas d’information sur le détail des formes, les concavités ne sont donc pas toujours détectées et la densité de masse est souvent mal estimée. Dans Kaasalainen *et al.* (2002), les auteurs précisent qu’une forme non convexe n’approxime pas mieux les données que la forme convexe proposée.

Les coefficients des harmoniques sphériques de Sylvia sont calculés jusqu’au degré et à l’ordre 10. Après avoir effectué des intégrations de test, nous concluons qu’un développement jusqu’au degré et à l’ordre 4 est suffisant pour approximer précisément la perturbation due à la forme de Sylvia<sup>4</sup>. Ces coefficients sont présentés dans la table 4.2. Lorsqu’un modèle de forme non convexe

3. Accessible à l’adresse <http://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/asteroids3D/web.php>

4. Nous entendons par là qu’aller plus loin dans le développement en harmoniques sphériques ne modifie pas les cartes de MEGNO et ne modifie que faiblement les excentricités maximales (de l’ordre de  $10^{-4}$ ).



Degré (n)	Ordre (m)	$C_{n,m}$	$S_{n,m}$
2	0	-0.144	0
2	1	$0.359 \times 10^{-3}$	$-0.737 \times 10^{-2}$
2	2	$-0.210 \times 10^{-1}$	$-0.452 \times 10^{-1}$
3	0	$0.265 \times 10^{-2}$	0
3	1	$0.664 \times 10^{-2}$	$0.152 \times 10^{-2}$
3	2	$-0.223 \times 10^{-3}$	$-0.396 \times 10^{-3}$
3	3	$-0.153 \times 10^{-2}$	$0.368 \times 10^{-2}$
4	0	$0.330 \times 10^{-1}$	0
4	1	$-0.304 \times 10^{-2}$	$0.578 \times 10^{-2}$
4	2	$-0.403 \times 10^{-3}$	$0.376 \times 10^{-2}$
4	3	$-0.278 \times 10^{-4}$	$-0.144 \times 10^{-3}$
4	4	$-0.264 \times 10^{-3}$	$0.813 \times 10^{-4}$

TABLE 4.2 – Coefficients principaux des harmoniques sphériques de Sylvia.

de Sylvia basé sur des données radar sera disponible, il serait intéressant de recalculer les coefficients des harmoniques sphériques et de refaire cette analyse. Cependant, nous sommes convaincus que les résultats seraient assez similaires. Remarquons que la valeur calculée pour  $J_2$  ( $= -C_{2,0}$ ) est cohérente avec la valeur estimée de Marchis *et al.* (2005b) :  $0.175 \pm 0.050$  et celle de Winter *et al.* (2009) : 0.12.

Les éléments orbitaux et les paramètres physiques utilisés pour l'intégration sont présentés dans la table 4.1. Les éléments orbitaux et les diamètres des satellites proviennent de Marchis *et al.* (2005b) et leur masse de Winter *et al.* (2009). Les éléments orbitaux des deux satellites correspondent à deux époques de référence différentes. Nous avons donc choisi comme unique époque de référence le milieu de ces deux époques (JD 2453248) et nous avons calculé l'anomalie moyenne des satellites à cette date, en considérant des moyens mouvements constants. Les éléments orbitaux héliocentriques de Sylvia à cette époque, de même que son rayon et sa période de rotation, proviennent du service JPL Horizon<sup>5</sup>, la masse de Sylvia de Marchis *et al.* (2005b) et l'ascension droite et la déclinaison de ses pôles de Drummond et Christou (2008).

Nous utilisons deux modèles dynamiques pour étudier la dynamique du système : le premier est utilisé pour les termes de courtes périodes et pour une intégration numérique précise et le second est utilisé pour étudier l'évolution séculaire du système.

---

5. Accessible en ligne à l'adresse <http://ssd.jpl.nasa.gov/?horizons>

### 4.2.1 Intégrations numériques des courtes périodes

Notre premier jeu d'intégrations est basé sur les équations complètes du mouvement orbital des satellites Romulus et Rémus. Ces simulations ont été réalisées avec le logiciel NIMASTEP et avec un intégrateur Runge-Kutta-Fehlberg d'ordre 4 à pas variable et une précision relative de  $10^{-12}$  à chaque pas (comme dans le chapitre précédent). Les perturbations gravitationnelles des planètes terrestres et géantes sont négligeables, tout comme les variations orbitales de Sylvia au vu des temps d'intégration considérés ici. Nous présentons à la figure 4.2 la hiérarchie entre le problème des deux corps et les différentes perturbations sur l'accélération des satellites, en fonction de la distance relative depuis Sylvia (c'est à dire la distance du centre de masse de Sylvia normalisée par son rayon équatorial). Ces résultats ont été confirmés par des simulations numériques.

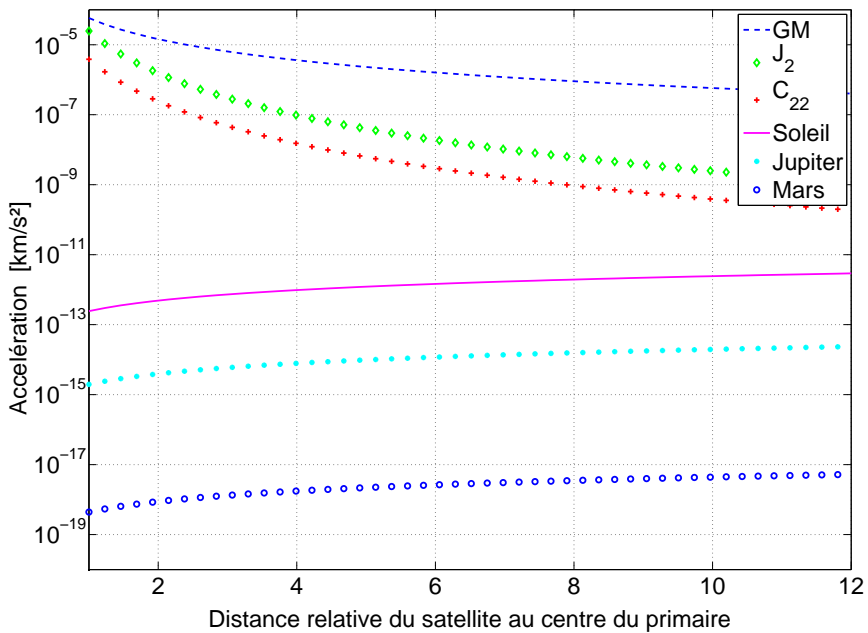


FIGURE 4.2 – Ordre de grandeur de la composante radiale de l'accélération d'un satellite de Sylvia due à différentes perturbations, en fonction de la distance depuis Sylvia (exprimée en rayon de Sylvia).

Nous considérons dans la suite une orbite keplerienne, excentrique et inclinée pour Sylvia. La rotation de Sylvia est supposée constante et son axe de rotation, lui aussi fixé, correspond à son axe principal d'inertie. Nous intégrons

numériquement le MEGNO en même temps que les équations du mouvement. Dans nos simulations, nous arrêtons l'intégration lorsque la valeur du MEGNO atteint 10, et nous considérons les valeurs dans l'intervalle  $[3 : 10]$  comme moyennement chaotiques.

Nous intégrons un grand nombre d'orbites en faisant varier le demi-grand axe et l'excentricité d'un des satellites tout en conservant les autres conditions initiales constantes. Le repère utilisé est centré au centre de masse de Sylvia (le Soleil est alors en rotation autour de celui-ci) et ses axes sont les axes principaux d'inertie de Sylvia. Le temps d'intégration est de 20 ans et les simulations sont arrêtées lorsque les satellites entrent en collision mutuellement ou avec Sylvia, ou dans le cas d'une éjection sur une orbite héliocentrique. Les résultats sont présentés à la figure 4.3 pour Rémus (en haut) et Romulus (en bas). La grille des cartes est de  $100 \times 100$  orbites.

La position réelle de Rémus et Romulus (indiquée par une croix noire) se trouve dans une zone très stable, même lorsqu'on considère les incertitudes sur le demi-grand axe et sur l'excentricité (voir table 4.1). Les cartes montrent clairement deux types de zones d'instabilité (en noir sur la figure). La première est due à des résonances gravitationnelles et apparaît systématiquement pour des valeurs du demi-grand axe de Rémus inférieures à 400 km. En-dessous de cette valeur, Rémus s'écrase rapidement sur Sylvia ou est éjecté du système. Les satellites ont tous les deux une petite excentricité initiale, ce qui fait que leurs orbites sont loin des régions où les superpositions de résonances gravitationnelles sont nombreuses. La largeur et la forme des résonances gravitationnelles dans le cas général d'un satellite ont été étudiées par Mysen *et al.* (2006) et Mysen et Aksnes (2007). Dans la première carte, une fine ligne verticale d'instabilité peut être vue pour Rémus à  $a_{rem} = 440$  km, ce qui correspond à la résonance gravitationnelle 3 : 1 (correspondant à l'argument  $3\lambda_{rem} - \phi$ , où  $\lambda_{rem}$  est la longitude moyenne de Rémus et  $\phi$  l'angle sidéral de Sylvia). Des résonances d'ordres supérieurs à peine visibles, comme la 4 : 1 à  $a_{rem} = 530$  km sont trop faibles pour déstabiliser l'orbite.

Le second type de zone d'instabilité correspond aux résonances en moyen mouvement (notées MMRs dans la suite pour *Mean Motion Resonances*) entre les deux satellites, pour des demi-grands axes élevés dans la carte de Rémus, et pour des demi-grands axes faibles dans celle de Romulus. Les MMRs ont typiquement une forme de V (voir par exemple Goździewski *et al.* 2008b; Bazzó *et al.* 2010) et sont donc plus larges pour de grandes excentricités. Ces résonances peuvent être vues plus facilement sur la figure 4.4, où nous avons modifié le demi-grand axe des deux satellites en même temps, dans l'intervalle 500 – 1500 km pour Rémus et 1000 – 2000 km pour Romulus. Les autres variables initiales sont égales à leur valeur réelle. La discrétisation de la carte est la même qu'à la figure 4.3. Remarquons qu'en augmentant le nombre de points des figures 4.3 et 4.4, nous augmentons le nombre de résonances détectées mais

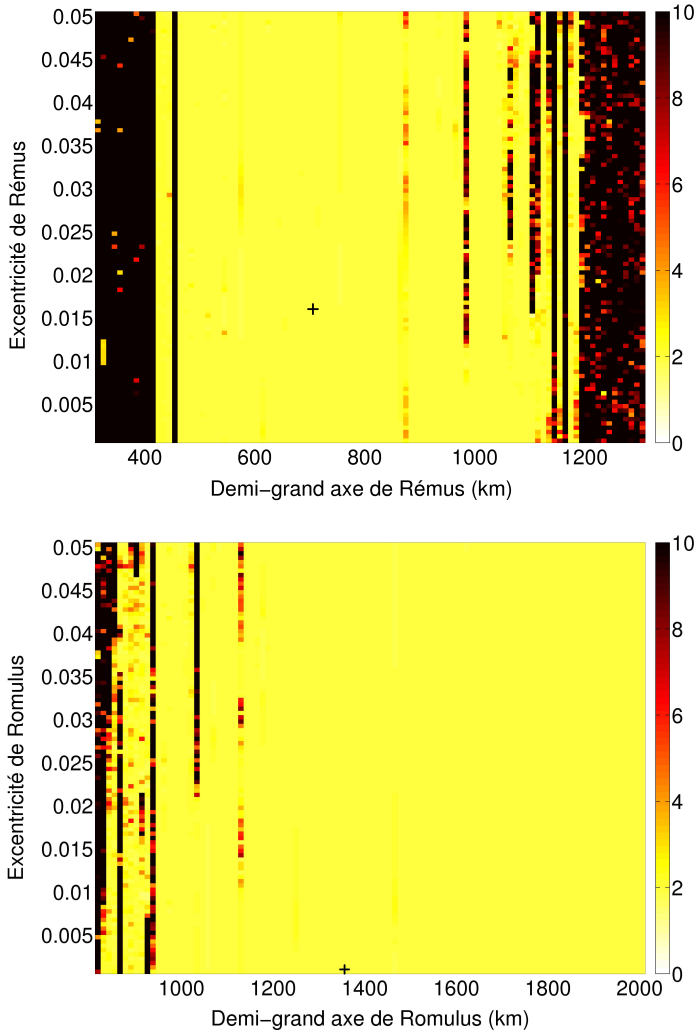


FIGURE 4.3 – Cartes de MEGNO de Rémus (haut) et Romulus (bas) en demi-grand axe et excentricité. Les orbites stables quasi-périodiques correspondent à un code de couleur de 2 (jaune), tandis que les orbites chaotiques ont un MEGNO  $> 2$  (de orange à noir). Un croix noire représente la position réelle du système Rémus-Romulus.

celles-ci ne sont que des résonances superficielles. Nous avons vérifié qu’aucune résonance majeure (ayant une grande influence sur les orbites) n’était cachée avec la discrétisation choisie.

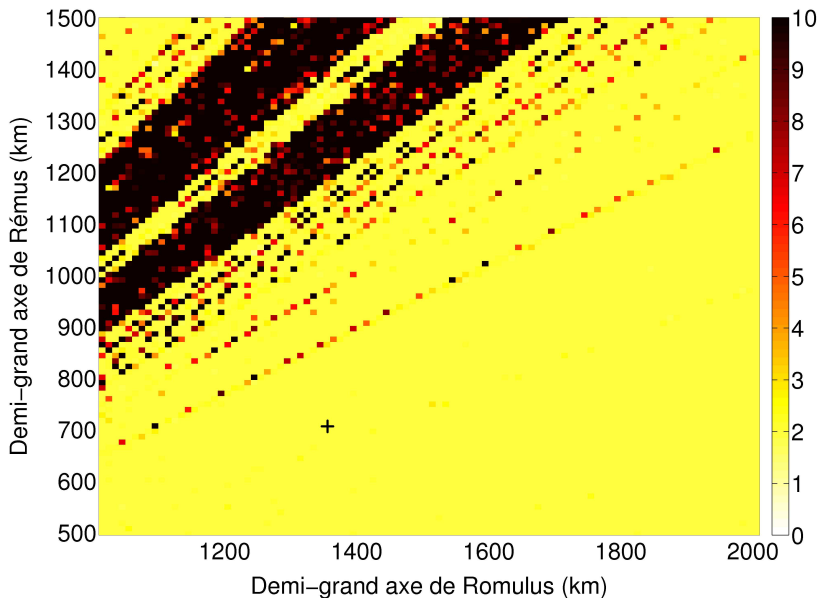


FIGURE 4.4 – Carte de MEGNO en demi-grands axes des deux satellites. Une croix noire indique la position actuelle du système Rémus-Romulus. La résonance en moyen mouvement 2 : 1 entre Rémus et Romulus est la première résonance visible au-dessus de la position actuelle du système.

Les MMRs correspondent aux différentes lignes, chacune d'elles décrivant une résonance  $k_1 n_1 \simeq k_2 n_2$ , où  $n_1$  et  $n_2$  sont les moyens mouvements des satellites, et  $k_1$ ,  $k_2$  sont des entiers. En négligeant les masses des satellites par rapport à la masse de Sylvia, les lignes sont décrites par la relation  $a_1 \simeq (k_1/k_2)^{2/3} a_2$ . Les résonances se chevauchent lorsque les satellites ont des demi-grands axes plus proches. Les deux zones importantes d'instabilité se trouvent de chaque côté de la ligne  $a_2 = a_1$  (la résonance 1 : 1). Elles correspondent à des orbites initiales menant à des rencontres proches entre les satellites, résultant en des collisions ou des éjections du système après une évolution chaotique.

La position actuelle du système est représentée par une croix sur la figure. Le système se trouve donc dans une zone vraiment stable, bornée par les MMRs 2 : 1 et 3 : 1 (résonance trop fine pour être détectée sur la figure 4.4), et évolue très régulièrement pendant au moins  $10^4$  ans.

La figure 4.5 montre l'excentricité maximale atteinte par les satellites sur 20 ans, en fonction de leurs demi-grands axes initiaux. Nous changeons le demi-grand axe d'un des satellites en conservant l'autre constant. Cela nous permet

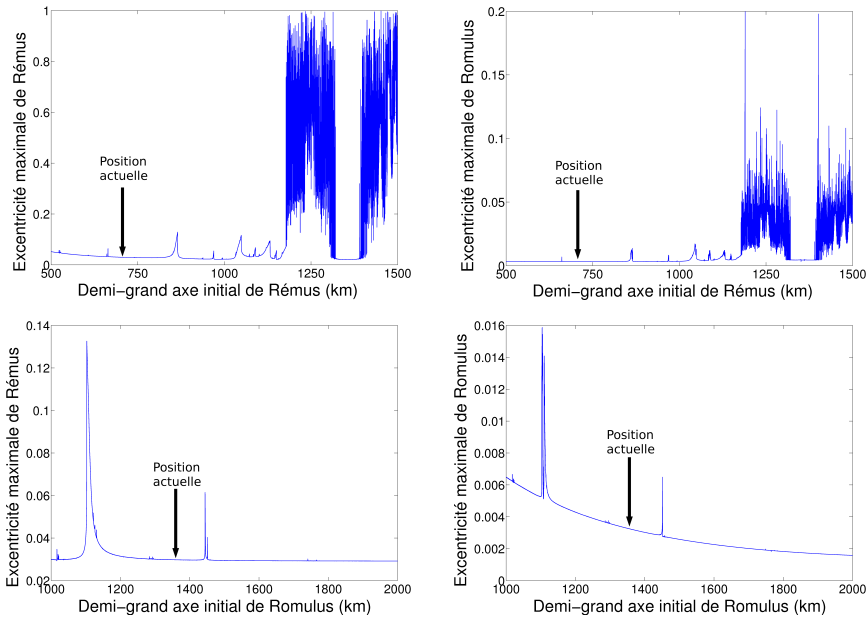


FIGURE 4.5 – Excentricités maximales atteintes par Rémus (à gauche) et par Romulus (à droite) sur 20 ans, en fonction du demi-grand axe initial de Rémus et Romulus. Les deux pics importants vus dans les graphiques du bas correspondent aux MMR 2 : 1 et 3 : 1.

d'examiner directement l'influence du chaos sur l'évolution orbitale des satellites. La figure indique que l'excentricité de Rémus peut augmenter énormément à l'intérieur des MMRs principales : jusqu'à 0.13 dans la MMR 2 : 1 et dix fois plus que l'excentricité de Romulus. Ceci reflète juste le fait qu'en raison de leur masses respectives, Rémus est bien plus perturbé par Romulus que l'inverse. En conséquence, l'excentricité de Romulus n'augmente de façon significative que dans les zones fortement chaotiques causées par des rencontres proches.

Nous étudions maintenant l'évolution séculaire du système.

#### 4.2.2 Intégrations numériques des longues périodes

Un problème classique des intégrations numériques sur de longues périodes est le temps CPU. En effet, les courtes périodes imposent un pas d'intégration très petit mais le temps d'intégration est dans ce cas très grand. La solution est de faire une moyennisation sur ces périodes. Dans notre modèle, les courtes périodes sont la période de rotation de Sylvia (de 5.184 heures) et les périodes de révolution des satellites. Nous allons donc utiliser les équations de mouvement moyennisées sur l'angle sidéral de Sylvia et sur les anomalies moyennes

des satellites.

Nous intégrons numériquement les équations de Lagrange (Brouwer et Clemence 1961) pour chaque satellite :

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \lambda}, \quad (4.1)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \varpi} + (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \lambda} \right), \quad (4.2)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left( \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \Omega} + (1 - \cos i) \left( \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \varpi} + \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial \lambda} \right) \right), \quad (4.3)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i}, \quad (4.4)$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{na^2} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} + \frac{1 - \cos i}{\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i} \right), \quad (4.5)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2} - 1 + e^2}{na^2 e} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial e} + \frac{1 - \cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \langle R \rangle}{\partial i}, \quad (4.6)$$

où  $n$  est le moyen mouvement et  $a, e, i, \Omega, \varpi$  et  $\lambda$  sont respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude du nœud, la longitude du péricentre ( $= \Omega + \omega$ , où  $\omega$  l'argument du péricentre) et la longitude moyenne ( $\lambda = \varpi + M$  où  $M$  est l'anomalie moyenne). La fonction perturbatrice moyennisée  $\langle R \rangle$  est la somme des différentes perturbations moyennisées entre les satellites  $\langle R \rangle = \langle R_{mut} \rangle + \langle R_{obl} \rangle + \langle R_{\odot} \rangle$ .

La perturbation mutuelle entre les satellites  $\langle R_{mut} \rangle$  est approximée par un développement à l'ordre 2 en excentricité et en inclinaison (Murray et Dermott, 2000). La perturbation due à l'aplatissement de Sylvia  $\langle R_{obl} \rangle$  est représentée par un développement d'ordre 4 en excentricité et en inclinaison de la fonction perturbatrice de l'aplatissement, contenant les termes en  $J_2, J_2^2$  et  $J_4$  (Veras 2007). L'expression additionnelle séculaire provenant du  $C_{2,2}^2$  décrite par De Saedeleer et Henrard (2006) a aussi été prise en compte, même si elle n'a montré qu'une très faible influence sur les résultats. Finalement, la perturbation du Soleil  $\langle R_{\odot} \rangle$  a été modélisée par le développement analytique de Brumberg *et al.* (1971) qui peut être moyennisé sur les anomalies moyennes des satellites, en conservant l'évolution orbitale du Soleil en coordonnées sphériques. Ces fonctions perturbatrices sont présentées plus en détail dans l'annexe C. L'orbite du Soleil est modélisée par une orbite avec précession, dont les trois fréquences fondamentales ( $n_{\odot}, \dot{\varpi}_{\odot}, \dot{\Omega}_{\odot}$ ) ont été prises de la base de données AstDys<sup>6</sup>.

L'utilisation de ces fonctions perturbatrices moyennisées implique un demi-grand axe fixe (pendant l'intégration) pour les satellites, ainsi que la suppression

---

6. Accessible en ligne à l'adresse <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>

des résonances en moyen mouvement du système dynamique. Les mêmes orbites que sur la figure 4.4 (en faisant varier les demi-grands axes des satellites) ont été intégrées sur 6600 années. Les résultats sont présentés à la figure 4.6. Alors

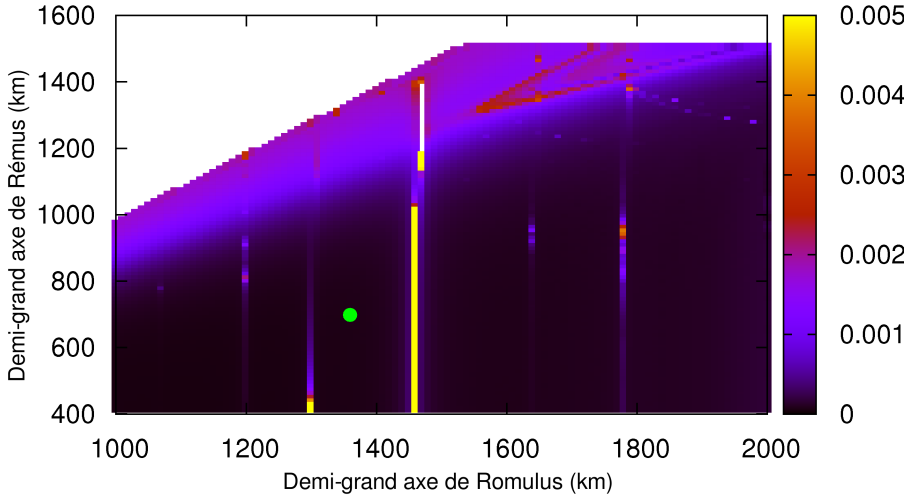


FIGURE 4.6 – Excentricités maximales atteintes par Romulus sur 6600 années, en fonction du demi-grand axe initial des satellites. Le point vert indique la position actuelle du système. Le code de couleur correspond à la valeur maximale de l'excentricité de Romulus, l'échelle étant donnée à droite.

que le MEGNO pourrait aussi être utilisé dans ces intégrations (en dérivant les équations de Lagrange par rapport aux éléments orbitaux), nous avons choisi de montrer les excentricités maximales atteintes par Romulus, qui sont elles aussi un indicateur de la diffusion chaotique dont souffrent les orbites des satellites. Les régions blanches indiquent des orbites pour lesquelles le demi-grand axe de Rémus est plus grand que celui de Romulus, et ne sont donc pas intégrées numériquement. L'intervalle du code de couleur a été réduit et choisi afin de mettre en évidence les résonances séculaires. Des lignes verticales sont visibles et représentent des résonances séculaires de type *évection*, ici entre la fréquence du péricentre de Romulus et le moyen mouvement du Soleil (autour de Sylvia) :

$$k_1 \dot{\varpi} \simeq k_2 n_{\odot}, \quad (4.7)$$

avec  $k_1$  et  $k_2$  entiers. En particulier, la résonance appelée *évection* (lorsque  $k_1 = k_2 = 1$ ) et ses implications sur la dynamique des satellites a été étudiée par différents auteurs (Touma et Wisdom 1998 ; Breiter 2000 ; Yokoyama *et al.* 2008 ; Čuk et Nesvorný 2010 ; Frouard *et al.* 2010) et est localisée sur la figure 4.6 à un demi-grand axe de Romulus de 1460 km. C'est la caractéristique la plus visible de la carte. À l'intérieur de la résonance, l'orbite de Romulus de-



vient hautement chaotique et son excentricité peut augmenter jusqu'à 0.2. Les autres résonances de la famille des évections ont une influence beaucoup plus faible sur les évolutions orbitales. Nous pouvons signaler que les résonances d'évection considérées ici sont dues à l'aplatissement de l'astéroïde, qui accélère considérablement la période de précession de  $\varpi$ .

En dépit du fait que les cartes ne montrent que les excentricités maximales de Romulus, on peut quand même voir quelques effets des résonances d'évection sur Rémus. Ces résonances sont présentes dans le coin en haut à droite de la carte. Par exemple, l'une d'entre elles commence à  $a_{rom} = 2000$  km et  $a_{rem} = 1250$  km. Si la masse de Rémus avait été plus grande que celle de Romulus, ces résonances auraient été à peu près horizontales. Mais dans notre cas, la perturbation de Romulus change sensiblement la fréquence du péricentre de Rémus, avec, comme effet, la courbure de ces résonances.

De nouveau, la position actuelle du système est mise en évidence dans la carte et se situe dans une zone très stable.

### 4.3 Généralisation à d'autres systèmes

Puisque nous savons que les orbites de Rémus et de Romulus sont localisées dans une zone dynamiquement stable, il est intéressant de savoir si c'est également le cas pour les autres systèmes triples connus. Nous analysons les systèmes (45) Eugenia, (93) Minerva, (216) Kleopatra et (136108) Haumea. Nous allons aussi localiser la résonance d'évection pour les satellites d'astéroïdes de manière générale.

Les éléments orbitaux des astéroïdes traités ici proviennent de la base de données AstDys<sup>7</sup>. Les données concernant les paramètres physiques des astéroïdes et des satellites associés, de même que les éléments orbitaux des satellites, proviennent de différentes sources : (22) Kalliope (Descamps *et al.* 2008 ; Marchis *et al.* 2008a), (45) Eugenia (Kaasalainen *et al.* 2002 ; Marchis *et al.* 2010), (87) Sylvia (Marchis *et al.* 2005b), (93) Minerva (Marchis *et al.* 2011), (107) Camilla (Torppa *et al.* 2003 ; Marchis *et al.* 2005a), (121) Hermione (Marchis *et al.* 2005c ; Descamps *et al.* 2009), (130) Elektra (Marchis *et al.* 2008b ; DAMIT<sup>8</sup>), (216) Kleopatra (Descamps *et al.* 2011), (243) Ida (Petit *et al.* 1997), (283) Emma (Marchis *et al.* 2008b ; DAMIT), (136108) Haumea (Ragozzine et Brown 2009 ; Rabinowitz *et al.* 2006).

7. Accessible en ligne à l'adresse <http://hamilton.dm.unipi.it/astdys/>

8. Accessible à l'adresse <http://astro.troja.mff.cuni.cz/projects/asteroids3D/web.php>

### 4.3.1 Les résonances en moyen mouvement

La détermination de la localisation des systèmes triples par rapport à leurs résonances en moyen mouvement nécessite simplement la connaissance des périodes des satellites. Nous montrons à la figure 4.7 les positions en demi-grand axe des cinq systèmes multiples considérés ici : (45) Eugenia, (87) Sylvia, (93) Minerva, (216) Kleopatra et (136108) Haumea. Les demi-grand axes sont normalisés par le rayon de Hill de l'astéroïde, défini à l'équation (2.7). La figure montre que tous les systèmes multiples, excepté (216) Kleopatra, se trouvent entre les résonances en moyen mouvement 2 : 1 et 3 : 1.

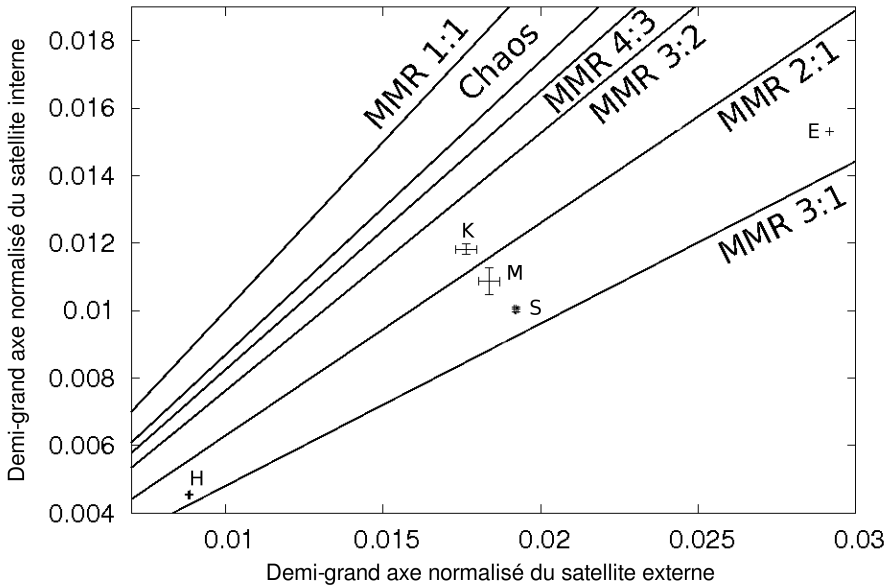


FIGURE 4.7 – Demi-grands axes des systèmes multiples normalisés par le rayon de Hill de l'astéroïde. De gauche à droite : (136108) Haumea, (216) Kleopatra, (93) Minerva, (87) Sylvia, (45) Eugenia.

### 4.3.2 La résonance d'évection

Nous montrons dans cette sous-section la localisation des satellites par rapport à la résonance d'évection. Puisque la résonance d'évection pour Romulus correspond à un demi-grand axe fixe de celui-ci, nous supposons que ce sera aussi le cas pour les autres systèmes. Nous cherchons donc une valeur fixe du demi-grand axe  $a_{evect}$  correspondant à l'évection pour chaque satellite. Pour cela, nous résolvons  $\dot{\varpi} = n_{\odot}$  pour  $a_{evect}$ . La fréquence du péricentre  $\dot{\varpi}$  est

obtenue par l'équation de Lagrange correspondante (4.5) où la fonction perturbatrice moyennisée  $\langle R \rangle = \langle R_{obl} \rangle + \langle R_{\odot} \rangle$  contient l'influence du Soleil et l'aplatissement de l'astéroïde. L'excentricité et l'inclinaison du satellite sont constants, mais la solution  $a_{evac}$  dépend encore de l'argument du péricentre  $\omega$  du satellite, bien que nous ayons vérifié que cette dépendance est très négligeable. Les coefficients d'aplatissement  $J_2$  et  $J_4$  sont déterminés grâce à l'approximation ellipsoïdale de la forme de l'astéroïde, en utilisant la formule (2.8) de Boyce (1997). Pour certains systèmes, l'approximation ellipsoïdale de la forme de chaque astéroïde et une valeur théorique du  $J_2$  sont connus. Le calcul de  $a_{evac}$  donne approximativement des résultats similaires avec les deux types de données. Une fonction perturbatrice moyennisée décrivant la perturbation d'un satellite supplémentaire est utilisée dans le cas de systèmes triples. Dans ce cas, la valeur de  $\varpi$  pour chaque satellite est déterminée en fixant le demi-grand axe de l'autre satellite.

Dans le cas de (87) Sylvia et (136108) Haumea, nous avons trouvé que la fréquence du péricentre du satellite interne n'est pas assez basse que pour être commensurable avec le moyen mouvement du Soleil. Nous n'avons pas étudié le système (216) Kleopatra à cause du manque d'information à propos des excentricités de ses satellites. De même, certains binaires n'ont pas été retenus dans cette étude à cause du manque d'information à propos de la forme de leur primaire à ce jour. C'est le cas de (379) Huenna, (702) Alauda et (762) Pulkova.

La distance des satellites à la résonance d'évection est présentée à la figure 4.8. Les incertitudes en demi-grand axe et excentricité sont aussi données. Remarquons que la plupart des systèmes se situent avant la résonance d'évection et ceux qui se trouvent après cette résonance en sont proches.

## 4.4 Conclusion

Nous avons étudié la dynamique et la stabilité du système triple (87) Sylvia en utilisant des intégrations numériques sur les équations du mouvement complètes et sur les équations du mouvement moyennisées. Nous avons utilisé un modèle de forme de Sylvia dérivé d'observations photométriques pour calculer les coefficients des harmoniques sphériques jusqu'aux termes  $C_{4,4}$ ,  $S_{4,4}$  pour les intégrations complètes. La position actuelle du système se trouve dans une zone très stable, entre la MMR 2 : 1 et la MMR 3 : 1 et avant la résonance d'évection.

Les autres systèmes triples connus considérés ici sont tous dans une zone stable et, à l'exception de (216) Kleopatra, se trouvent aussi entre la MMR 2 : 1 et la MMR 3 : 1.

Fang *et al.* (2012) présentent, postérieurement à notre article, une étude du système (87) Sylvia basée sur de nouvelles observations d'optique adaptative.

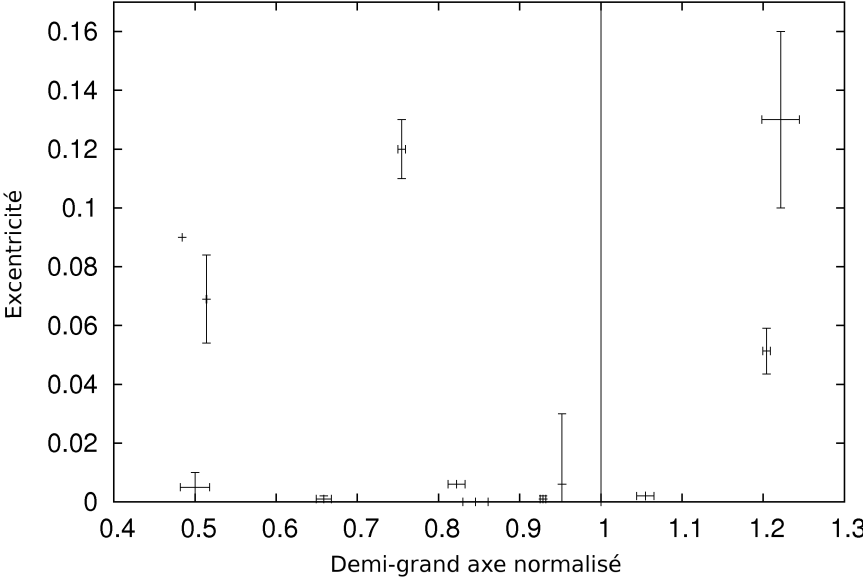


FIGURE 4.8 – Demi-grand axe et excentricité des satellites. Le demi-grand axe est normalisé par la position de la résonance d’évection, représentée par la ligne verticale.

Leur estimation des paramètres du système donnent des valeurs similaires à celles de Marchis *et al.* (2005b) pour les éléments orbitaux des satellites et légèrement différentes pour leurs masses et pour le coefficient  $J_2$  de Sylvia (notre évaluation du  $J_2$  se trouve entre les valeurs de ces deux articles). Leurs simulations confirment les nôtres puisqu’ils concluent que le système est stable sur un million d’années.



# Chapitre 5

## Phénomènes de dissipation pour les satellites d'astéroïdes

### 5.1 Introduction

Le chapitre précédent montre que le système (87) Sylvia actuel se trouve dans une zone stable mais est entouré de régions chaotiques. Nous nous posons à présent la question de savoir si, dans le futur, le système restera dans la zone stable ou s'il croquera une ou plusieurs de ces résonances (engendrant du chaos). Pour étudier l'évolution du système (et d'autres systèmes par la suite), nous prenons en compte deux effets dissipatifs : les effets de marée et l'effet BYORP (pour Binary YORP). Nous allons examiner comment ces deux effets peuvent amener le système à traverser les résonances et quelles sont les échelles de temps concernées.

Nous ne modéliserons pas, dans la suite, le changement de vitesse de rotation de Sylvia dû à l'effet YORP<sup>1</sup> (Yarkovsky O'Keefe Radzievskii Paddack) puisque ce dernier n'est important que pour des astéroïdes de taille  $\lesssim 20$  km et que Sylvia a un rayon d'environ 130.5 km.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont également publiés dans Frouard et Compère (2012) et les simulations ont été réalisées grâce à un logiciel rédigé par Julien Frouard.

---

1. L'effet YORP est la modification de la vitesse de rotation et de l'orbite d'un astéroïde causée par les différences de température à sa surface dues à sa non-sphéricité (voir par exemple Rubincam (2000), Vokrouhlický *et al.* (2003), Nesvorný et Vokrouhlický (2007) ou encore Rossi *et al.* (2009)).

## 5.2 Les effets de marées

Expliquons tout d'abord en quoi consistent les effets de marée pour un système d'astéroïdes multiples. Les astéroïdes ne sont évidemment pas des masses ponctuelles, ce qui signifie que la force de gravitation exercée par un satellite sur l'astéroïde n'est pas uniforme. Par exemple, la force exercée sur la face qui est éloignée du satellite est plus faible que la force exercée sur la face qui est proche du satellite. Puisque ce corps n'est pas entièrement rigide, il y a une distorsion menant à un bourrelet de marée (voir figure 5.1). L'effet est similaire dans l'autre sens (l'effet de la gravitation exercée par l'astéroïde sur le satellite) mais de moindre importance puisque le satellite est de plus petite taille. Par contre, la réponse du satellite à l'effet de marée qu'il a produit peut avoir comme conséquence une évolution du système. À cause de la friction, les marées sont un phénomène dissipatif et peuvent mener à une évolution du demi-grand axe et de l'excentricité du satellite ainsi qu'à un changement de vitesse de rotation des deux corps. Les marées ont été étudiées en détail, notamment dans Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009), Goldreich et Sari (2009), Taylor et Margot (2010) et Taylor et Margot (2011). Plusieurs modèles de marées sont présents dans la littérature. Nous utilisons ici les équations classiques de Goldreich et Soter (1966) et Murray et Dermott (2000).

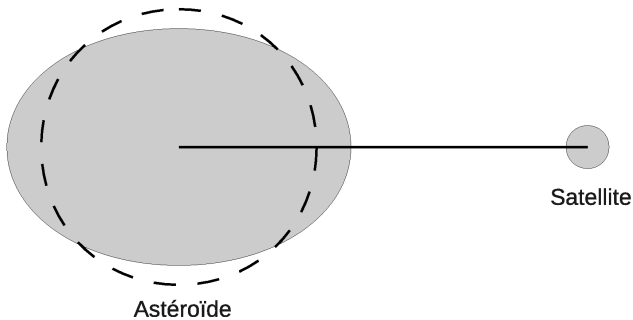


FIGURE 5.1 – Déformation d'une sphère par les effets de marée dus à un satellite.

Comme expliqué dans Goldreich et Sari (2009) et Taylor et Margot (2010), les marées exercées par le primaire sur un corps secondaire conduisent très efficacement la vitesse de rotation du secondaire  $\nu_s$  à la synchronisation avec le moyen mouvement  $n_s$ . Supposons dans la suite que cette étape a été atteinte et que  $\nu_{Rom} = n_{Rom}$  et  $\nu_{Rem} = n_{Rem}$ .

De façon générale, les équations de marée décrivant la variation du demi-grand axe et de l'excentricité d'un satellite sont, pour  $e \ll 1$  (Goldreich et Soter 1966; Murray et Dermott 2000) :

$$\dot{a} = \text{sign}(\nu_p - n_s) \frac{3k_{2p}}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^5 n_s a, \quad (5.1)$$

$$\dot{e} = \text{sign}(2\nu_p - 3n_s) \frac{57}{8} \frac{k_{2p}}{Q_p} \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{R_p}{a} \right)^5 n_s e, \quad (5.2)$$

pour les marées exercées par un satellite (prograde) sur le primaire, et :

$$\dot{a} = \text{sign}(\nu_s - n_s) \frac{3k_{2s}}{Q_s} \frac{m_p}{m_s} \left( \frac{R_s}{a} \right)^5 n_s a, \quad (5.3)$$

$$\dot{e} = -\frac{21}{2} \frac{k_{2s}}{Q_s} \frac{m_p}{m_s} \left( \frac{R_s}{a} \right)^5 n_s e, \quad (5.4)$$

pour les marées exercées par le primaire sur un satellite prograde.  $R$  est le rayon,  $m$  est la masse et les indices  $p$  et  $s$  représentent respectivement le primaire et le satellite. Les équations dépendent du nombre de Love  $k_2$  (qui dépend de la rigidité du corps) et de la fonction de dissipation  $Q$  qui quantifie la dissipation de l'énergie mécanique.

Le nombre de Love  $k_2$  est défini par :

$$k_2 = \frac{3/2}{1 + \tilde{\mu}}, \quad (5.5)$$

où  $\tilde{\mu}$  est la rigidité adimensionnelle définie par :

$$\tilde{\mu} = \frac{19\mu}{2g\rho R}. \quad (5.6)$$

$g$  est la gravité exercée à la surface du corps ( $g = Gm/R^2$ ),  $\rho$  est sa densité,  $\mu$  est la rigidité du matériau et  $G$  est la constante de gravitation.

Les valeurs typiques de la rigidité sont  $\sim 5 \times 10^{10} Nm^{-2}$  pour un corps rocheux ou  $\sim 4 \times 10^9 Nm^{-2}$  pour un corps de glace (Murray et Dermott 2000). Marchis *et al.* (2008a,b) utilisent  $5 \times 10^8 Nm^{-2}$  en considérant que Sylvia est un astéroïde modérément fragmenté, ce qui donne  $k_{2p} \approx 0.015$ . Cependant, Goldreich et Sari (2009) ont montré que la rigidité effective d'un rubble-pile peut être considérablement plus faible que celle d'un corps monolithique. Ils donnent l'approximation  $\tilde{\mu}_{rubble} \sim (\tilde{\mu}/\epsilon_Y)^{1/2}$  où  $\epsilon_Y$  est la constante d'élasticité et est égale à  $10^{-2}$ . Ceci nous donne  $k_{2p} \propto R$ , ce qui a été contredit par Jacobson et Scheeres (2011) qui ont établi la relation  $k_{2p} \propto 1/R$  basée sur des observations de la population d'astéroïdes binaires. Ici, nous utilisons les formules (5.5) et



(5.6) avec différentes valeurs de rigidité  $\mu$  qui couvrent un grand intervalle de valeurs de  $k_2$ .

La valeur de la fonction de dissipation  $Q$  est moins connue et est souvent choisie égale à  $\sim 100$  pour les corps monolithiques (Goldreich et Soter, 1966). Puisque dans les équations de marées (5.1)-(5.4) le nombre de Love et la fonction de dissipation sont groupés, nous allons discuter dans la suite les valeurs du produit  $\mu Q$ .

Lorsque  $\nu_s = n_s$ , les marées exercées sur le primaire par le satellite augmentent le demi-grand axe et l'excentricité, alors que celles exercées sur le satellite par la planète sont négligeables pour le demi-grand axe et diminuent l'excentricité, contre-balançant parfois complètement les marées exercées sur le primaire (Goldreich 1963). Il est important de garder à l'esprit les approximations utilisées pour obtenir les équations de marée (5.1)-(5.4) (voir Ferraz-Mello *et al.* 2008; Efroimsky et Williams 2009) : l'inclinaison est négligée, le potentiel de marée est limité au rapport  $(R_p/a)^3$ , et les retards de marées correspondant à chaque fréquence de Fourier du potentiel de marée sont considérés comme constants et sont égaux à l'inverse de  $Q$ .

### 5.3 L'effet BYORP

Nous prenons aussi en compte l'effet BYORP qui provient de l'asymétrie de la forme des satellites (Ćuk et Burns 2005 ; Ćuk et Nesvorný 2010 ; McMahon et Scheeres 2010 ; Steinberg et Sari 2011). Cet effet correspond à l'effet YORP mais pour un astéroïde binaire synchrone. Un satellite sphérique d'astéroïde en rotation synchrone avec celui-ci présentera toujours la même géométrie au Soleil. Ce n'est plus le cas si le satellite est non sphérique. La température à sa surface va donc varier et la réémission de l'énergie absorbée (venant des rayons du Soleil) par le satellite n'est pas symétrique. Cet effet modifie son orbite.

Nous utilisons les équations suivantes de Jacobson et Scheeres (2011)<sup>2</sup> :

$$\dot{a} = \pm \frac{3H_{\odot}B}{2\pi} \left( \frac{a^{3/2}}{\omega_d \rho R_p^{5/2}} \right) \frac{\sqrt{1 + m_s/m_p}}{(m_s/m_p)^{1/3}}, \quad (5.7)$$

$$\dot{e} = \mp \frac{3H_{\odot}B}{8\pi} \left( \frac{a^{1/2}e}{\omega_d \rho R_p^{5/2}} \right) \frac{\sqrt{1 + m_s/m_p}}{(m_s/m_p)^{1/3}}, \quad (5.8)$$

avec  $\omega_d = \sqrt{4\pi G\rho/3}$  et  $H_{\odot} = F_{\odot}/(a_{\odot}^2 \sqrt{1 - e_{\odot}^2})$  où  $F_{\odot}$  est la constante de radiation solaire,  $a_{\odot}$  et  $e_{\odot}$  sont le demi-grand axe et l'excentricité du Soleil. Le signe + dans (5.7) correspond au signe - dans (5.8) et inversement. L'effet

---

2. Nos équations diffèrent légèrement de celles de Jacobson et Scheeres (2011) puisqu'ici le demi-grand axe n'est pas normalisé par  $R_p$ .

	$\mu Q=10^{10}, B=10^{-3}$	$\mu Q=10^{10}, B=10^{-2}$	$\mu Q=10^{11}, B=10^{-3}$
âge Rémus	-47.8 Myr	-45.7 Myr	-453.2 Myr
âge Romulus	-200 Myr	-182 Myr	-1.8 Gyr
$a_{rom}$	1299.46 km	1291.53 km	1291.57 km

TABLE 5.1 – Âges dynamiques des satellites dus à l'évolution des marées et de BYORP pour différentes valeurs des paramètres de marée  $\mu Q$  et  $B$ . Les satellites sont considérés séparément. L'évolution est arrêtée lorsque les satellites atteignent la limite de stabilité  $a = 400$  km. La dernière ligne indique le demi-grand axe de Romulus lorsque Rémus atteint  $a_{crit}$ .

BYORP dépend du paramètre  $B$  qui représente la déviation du second corps par rapport à une sphère.  $B$  appartient à l'intervalle  $[0,2]$  et est souvent égal à  $10^{-3}$ . Comme expliqué dans Jacobson et Scheeres (2011), le signe de  $\dot{a}$  et  $\dot{e}$  dépend de la forme des satellites. Nous appellerons *évolution expansive conjointe* le cas où  $\dot{a} > 0$  et  $\dot{e} < 0$  et *évolution opposée conjointe* le cas où  $\dot{a} < 0$  et  $\dot{e} > 0$ .

Notons que l'effet BYORP domine les effets de marée pour de grands demi-grands axes, et inversement pour de petits demi-grands axes (Jacobson et Scheeres, 2011).

## 5.4 Dissipation du système Sylvia

Nous considérons dans un premier temps une évolution expansive conjointe.

### 5.4.1 L'évolution expansive conjointe

Nous calculons à présent une approximation de l'âge dynamique des satellites en intégrant numériquement les équations de marée et de BYORP dans le passé. Les satellites sont considérés séparément. Les intégrations sont arrêtées lorsque les satellites atteignent la limite de stabilité  $a = 400$  km. Nous présentons les résultats pour les paramètres représentatifs des marées et de BYORP suivants :  $\{\mu Q, B\} = [10^{10}, 10^{-3}], [10^{10}, 10^{-2}], [10^{11}, 10^{-3}]$  dans la table 5.1. L'âge dynamique trouvé pour Romulus est du même ordre de grandeur que celui obtenu par Taylor et Margot (2011) si on considère  $\mu Q = 10^{11}$ . Le demi-grand axe de Romulus au moment où Rémus atteint la limite de stabilité est aussi indiqué, ce qui reflète l'âge dynamique du système des deux satellites.

Vokrouhlický *et al.* (2010) rapportent l'existence d'une famille d'astéroïdes, née par collisions, autour de (87) Sylvia, avec des objets de tailles similaires à celles de Rémus et Romulus. Sur base de simulations numériques de la dispersion de cette famille, les auteurs concluent que l'âge dynamique de la famille est d'au moins plusieurs centaines de millions d'années. Les âges dynamiques

présentés dans la table 5.1 sont donc cohérents avec ces résultats si nous supposons que la famille d'astéroïdes et le système de satellites de Sylvia ont été créés durant la même collision catastrophique (Durda *et al.*, 2004). Il est important de noter que les âges dynamiques sont obtenus en supposant qu'aucune collision n'a eu lieu depuis cet événement, ce qui pourrait avoir changé considérablement les orbites des satellites.

Le paramètre  $B$  détermine l'amplitude de l'effet BYORP, mais a un effet assez réduit sur les orbites considérées ici.

Nous montrons à la figure 5.2 l'évolution du système avec les trois jeux de paramètres. L'évolution commence avec le demi-grand axe de Rémus égal à 400 km, jusqu'à la configuration actuelle, et est suivie ensuite pendant un milliard d'années. Les résonances principales (déterminées dans le chapitre précédent) sont indiquées sur la figure. L'évolution pour les paramètres  $\mu Q=10^{11}$ ,  $B=10^{-3}$  est fusionnée avec celle correspondant aux paramètres  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-2}$ , et s'arrête peu après la ligne d'évection. Les satellites sont sur des orbites convergentes (l'orbite de Rémus s'étend plus vite que celle de Romulus) pour les trois paramètres et le système croise la résonance d'évection avant la résonance en moyen mouvement 2 : 1 dans chaque cas.

Nous pouvons voir sur la figure 5.2 qu'une valeur de  $B$  de  $10^{-2}$  (ligne en pointillé sur la figure) permet au système de s'étendre davantage. Cela réduit aussi la distance entre les deux satellites, et donc conduit le système aux résonances en moyen mouvement et éventuellement à des zones chaotiques. Une plus petite valeur de  $B$  éloigne le système de ces zones au fur et à mesure que le temps d'intégration augmente. Le choix  $B = 10^{-2}$  a aussi comme effet la diminution de l'excentricité de Rémus après  $\sim 750$  millions d'années. La valeur de celle-ci augmente de façon monotone avec les deux autres jeux de paramètres.

### 5.4.2 L'évolution opposée conjointe

Examinons à présent l'évolution opposée conjointe, où  $\dot{a}^B < 0$  et  $\dot{e}^B > 0$ . Les âges dynamiques du système sont pratiquement identiques à ceux de la table 5.1. Pour les paramètres  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-3}$  et  $\mu Q=10^{11}$ ,  $B=10^{-3}$ , l'évolution est similaire à celle de la figure 5.2. L'évolution est sensiblement modifiée lorsque  $B = 10^{-2}$ . Pour cette valeur, les orbites deviennent divergentes après 450 millions d'années et les excentricités de Rémus peuvent atteindre 0.08, comparées à 0.03 pour l'évolution expansive conjointe.

Selon Jacobson et Scheeres (2011), les demi-grands axes devraient évoluer avec le scénario de l'évolution opposée conjointe (en négligeant les autres effets dynamiques) jusqu'à une valeur d'équilibre où les effets de marée et ceux de BYORP s'équilibrent. Cette valeur d'équilibre pour le demi-grand axe d'un

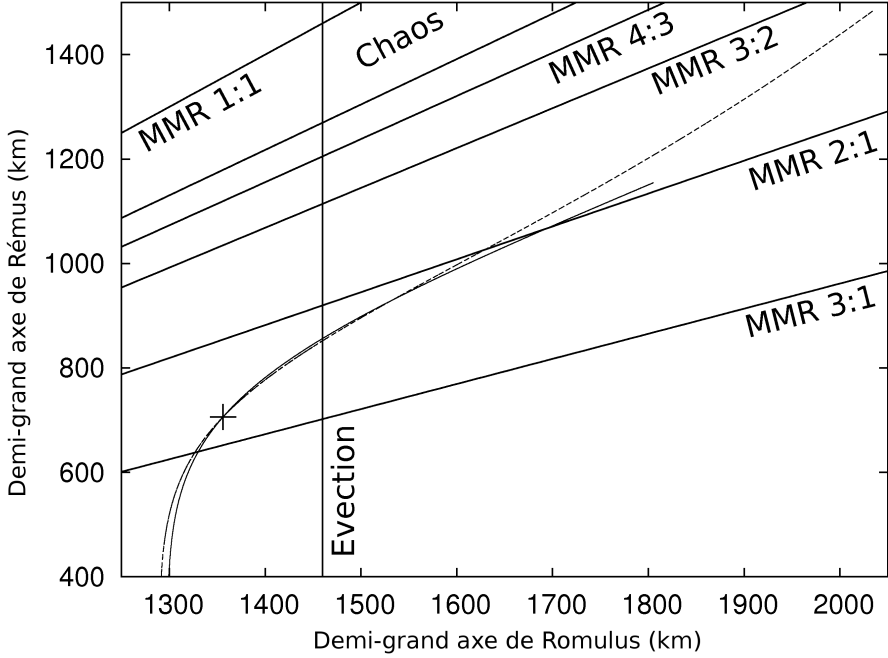


FIGURE 5.2 – Chemin suivi par le système dû à l’effet des marées et de BYORP avec différentes valeurs des paramètres  $\mu Q$  et  $B$ . La position actuelle du système est indiquée par une croix. La ligne solide correspond aux paramètres  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-3}$  tandis que la ligne en pointillé correspond à  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-2}$ . L’évolution correspondant aux paramètres  $\mu Q=10^{11}$ ,  $B=10^{-3}$  est fusionnée avec la ligne en pointillé.

satellite est (Jacobson et Scheeres 2011) :

$$a^* = \left( \frac{2\pi k_p \omega_d^2 \rho R_p^9 (m_s/m_p)^{4/3}}{B H_\odot Q} \right)^{1/7}. \quad (5.9)$$

Avec nos paramètres, ces équilibres valent  $a_{rem}^* = 1354$  km,  $a_{rom}^* = 2323$  km pour  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-3}$  et  $a_{rem}^* = 976$  km,  $a_{rom}^* = 1674$  km pour  $\mu Q=10^{11}$ ,  $B=10^{-3}$  et  $\mu Q=10^{10}$ ,  $B=10^{-2}$ . Ces demi-grands axes placent les orbites des satellites entre les MMRs 2 : 1 et 3 : 1.

Remarquons aussi que BYORP contrebalance suffisamment les effets de marée pendant l’évolution jusqu’à l’équilibre de telle manière que la convergence des orbites soit affaiblie. Le système est alors toujours maintenu entre les résonances 2 : 1 et 3 : 1 pour ces trois jeux de paramètres. Le scénario de l’évolution opposée conjointe empêche donc les satellites de croiser la résonance 2 : 1 et leur évite ainsi de subir des évolutions chaotiques liées à cette résonance.

En conclusion, dans chaque cas (l'évolution expansive et opposée), le système actuel va atteindre la résonance d'évection avant un milliard d'années et avant de croiser éventuellement la résonance 2 : 1. La conséquence principale de cet événement est que l'orbite de Romulus deviendra probablement hautement chaotique.

Notons que l'article de Fang *et al.* (2012) approfondit nos résultats pour l'évolution passée du système en analysant son passage par la résonance 3 : 1 (en prenant en compte les effets de marée). Ils concluent que le système a probablement traversé la résonance sans être capturé ou du moins qu'il n'a pas été capturé suffisamment longtemps dans la résonance pour que celle-ci ait augmenté l'excentricité de Romulus.

Nous allons à présent nous intéresser à la généralisation de notre étude à d'autres systèmes triples.

## 5.5 Zones génériques d'instabilité des systèmes triples

Nous avons vu au chapitre précédent que tous les systèmes triples analysés, à l'exception de (216) Kleopatra, se trouvent entre la MMR 2 : 1 et la MMR 3 : 1. La question qui se pose alors naturellement est : pourquoi ces systèmes se trouvent-ils (presque) tous dans cette configuration ? Est-ce juste une coïncidence ou l'explication est-elle dynamique ? Nous essayerons de répondre à ces questions dans la suite, en effectuant des intégrations numériques des équations de marées et de BYORP appliquées aux systèmes multiples considérés ici. Nous n'étudions pas les marées du système Haumea, puisque pour ce système (très particulier car ayant deux satellites très massifs), la fonction de dissipation  $Q$  ne peut être considérée comme constante (voir Ragozzine et Brown 2009).

Nous montrons, sur les figures 5.3 et 5.4, quelques évolutions possibles des systèmes Eugenia, Sylvia, Minerva et Kleopatra. Précisons à nouveau que ces évolutions sont idéalisées, dans le sens où nous supposons qu'aucun événement majeur (comme une collision ou une rencontre proche avec un corps céleste) n'a eu lieu pendant cette évolution.

Les évolutions sont obtenues en utilisant les trois jeux de paramètres  $\mu Q$  et  $B$  utilisés dans la section précédente, et en considérant les deux possibilités d'évolution (expansive pour la figure 5.3 et opposée pour la figure 5.4). Les évolutions commencent lorsque le satellite interne est en contact avec la surface de l'astéroïde dans le passé, et s'arrêtent un milliard d'années après aujourd'hui. Il apparaît que les évolutions de Sylvia et Kleopatra ne sont que légèrement affectées par l'effet BYORP. Les effets de marée dominent et les satellites sont

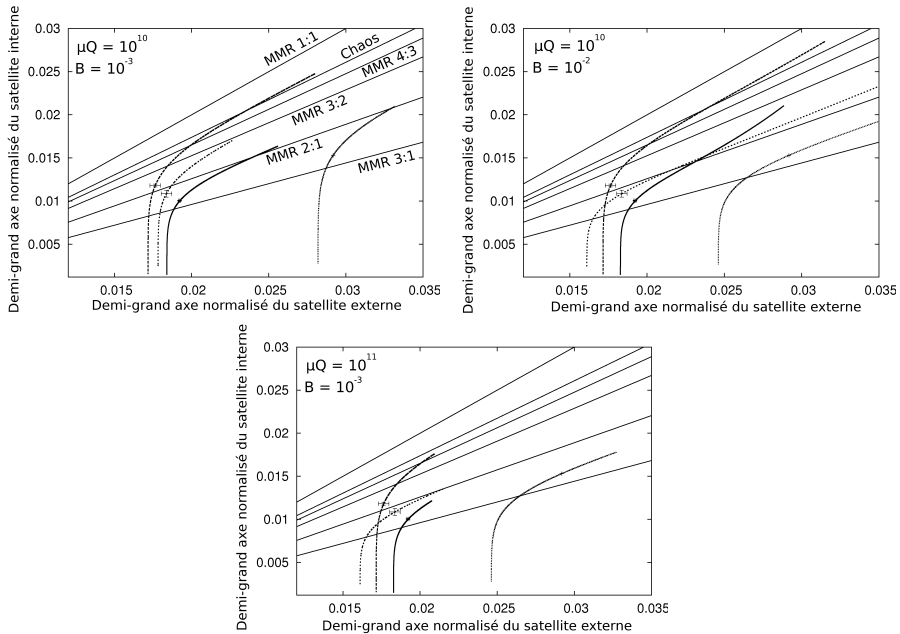


FIGURE 5.3 – Demi-grands axes des systèmes multiples normalisés par le rayon de Hill de leur astéroïde. De gauche à droite dans chaque carte : (216) Kleopatra, (93) Minerva, (87) Sylvia et (45) Eugenia. Chaque carte montre l'évolution dissipative des systèmes avec différents paramètres  $\mu Q$  et  $B$ , en supposant une évolution expansive conjointe.

donc plus proches du primaire dans le passé pour les deux possibilités d'évolution. Par contre, Minerva et Eugenia sont fortement affectés par BYORP, et comme cet effet domine, le demi-grand axe d'un ou des deux satellites (selon les paramètres  $\mu Q$  et  $B$ ) était plus important dans le passé dans le cas de l'évolution opposée conjointe.

Nous supposons que l'accumulation de MMRs (2 : 3, 3 : 4) et leur chevauchement, décrits dans le chapitre précédent, sont capables de détruire les systèmes multiples. D'ailleurs, hormis Kleopatra qui est située très près de la MMR 2 : 1, aucun système n'a été repéré dans cette région. À l'inverse, la MMR 3 : 1 ne semble pas être une zone chaotique importante pour ces systèmes. Ragozzine et Brown (2009) ont étudié l'évolution orbitale et l'effet de marée de (136108) Haumea, et suggèrent que le passage du système à travers la résonance 3 : 1 pourrait expliquer la grande valeur de l'excentricité de son satellite interne Namaka ( $e = 0.249$ ). Cependant, les excentricités connues des satellites des trois systèmes (45) Eugenia, (87) Sylvia et (93) Minerva sont assez faibles, la valeur maximale étant atteinte par Princess (le satellite le plus

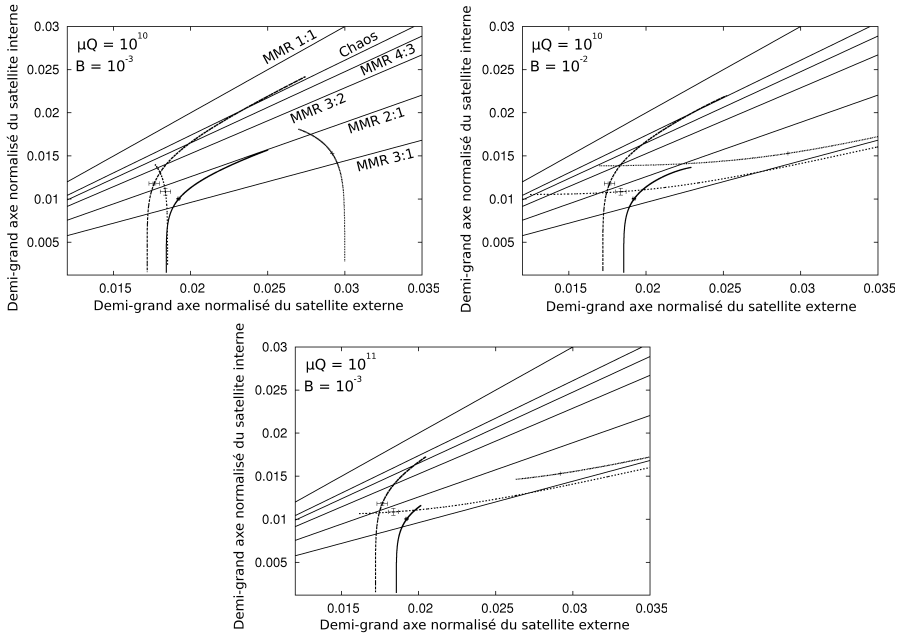


FIGURE 5.4 – Même figure que la figure 5.3 mais en supposant une évolution opposée conjointe.

interne d'Eugenia) avec  $e = 0.069$ . Comme nous l'avons vu pour Sylvia sur la figure 4.5 du chapitre précédent, l'influence de la MMR 3 : 1 sur les excentricités des satellites est relativement faible par rapport aux autres MMRs. Ceci pourrait indiquer que le passage à travers la MMR 3 : 1 est assez peu déstabilisant pour les satellites et n'augmente pas considérablement leur excentricité<sup>3</sup>.

Notre but est à présent d'identifier les paramètres dissipatifs pouvant pousser les systèmes vers des zones chaotiques ainsi que les échelles de temps concernées.

### 5.5.1 L'évolution expansive conjointe

La figure 5.3 est consacrée à l'évolution expansive conjointe. Pour les systèmes où les effets de marée dominant (Sylvia et Kleopatra), un effet BYORP plus fort pousse les systèmes dans les zones chaotiques (voir la section précédente pour Sylvia). Concernant les systèmes où l'effet BYORP domine, alors

3. Nous notons évidemment que les dimensions et masses du système (136108) Haumea et sa localisation dans les objets transneptuniens en font un système complètement différent des systèmes de la ceinture principale étudiés ici.

que pratiquement toutes les orbites des satellites sont convergentes, les paramètres dissipatifs peuvent empêcher les systèmes d'approcher les MMRs. Il y a deux raisons pour cela : d'une part, une grande rigidité peut geler l'évolution et garder les systèmes dans des régions stables pendant un long moment, comme c'est le cas dans la carte inférieure. D'autre part, le fait que les marées sont plus importantes pour les satellites internes, alors que BYORP est plus important pour les satellites externes, peut être observé dans le graphe en haut à droite. Alors que les marées rapprochent les satellites (et donc les rapprochent des MMRs), l'effet BYORP les garde loin des MMRs en augmentant le demi-grand axe du satellite externe. Les satellites convergent donc à un rythme plus lent et les évolutions de ces systèmes deviennent asymptotiques par rapport aux MMRs. C'est particulièrement le cas des systèmes Eugenia et Minerva.

Les systèmes peuvent donc atteindre des demi-grands axes importants tout en restant loin des zones d'instabilité. Cependant, nous pouvons noter qu'aucun satellite n'est localisé plus haut que  $0.03 R_H$ . Nous pouvons, par exemple, comparer cette valeur à la zone de stabilité globale autour de (87) Sylvia estimée par les formules de Domingos *et al.* (2006), qui donnent une limite de stabilité de  $[0.37-0.45] R_H$  correspondant à la perturbation du Soleil. Cette limite à  $0.03 R_H$  pourrait être due à l'instabilité causée par la résonance d'évection (voir la suite de ce chapitre).

### 5.5.2 L'évolution opposée conjointe

La situation est très différente pour la figure 5.4 (évolution opposée conjointe). Considérons d'abord les systèmes pour lesquels l'effet BYORP domine. Selon la valeur du paramètre  $B$ , le demi-grand axe du satellite externe (carte en haut à gauche) ou celui des deux satellites (cartes en haut à droite et en bas) va diminuer dans le futur. Ces systèmes migrent donc vers des régions avec de faibles demi-grands axes où les MMRs sont proches les unes des autres, sauf si les satellites atteignent l'équilibre (voir équation 5.9) auparavant. Ces valeurs d'équilibre permettent aussi aux systèmes, pour lesquels les effets de marée dominant, de rester loin des MMRs, comme c'est le cas pour Sylvia (voir la section précédente). La localisation de ces valeurs d'équilibre dépend des masses des satellites et du paramètre  $B$  (sous-section 5.5.4).

### 5.5.3 Les échelles de temps

Même si nous avons maintenant une idée des différentes évolutions des systèmes en fonction des paramètres dissipatifs, les échelles de temps impliquées sont plus difficiles à déterminer. La table 5.2 montre les âges dynamiques des satellites externes pour les quatre systèmes triples étudiés, avec l'évolution expansive conjointe. Dans le scénario de l'évolution opposée conjointe, les demi-



	$\mu Q, B$		
	$10^{10}, 10^{-3}$	$10^{10}, 10^{-2}$	$10^{11}, 10^{-3}$
(45) Eugenia	2.55 Gyr	600 Myr	6 Gyr
(93) Minerva	983 Myr	310 Myr	3.1 Gyr
(87) Sylvia	200 Myr	182 Myr	1.8 Gyr
(216) Kleopatra	30.5 Myr	30 Myr	292 Myr

TABLE 5.2 – Âges dynamiques du satellite externe pour chaque système. Ils sont obtenus par l'évolution des effets de marées et de BYORP pour différentes valeurs des paramètres  $\mu Q$  et  $B$ .

grands axes des satellites étaient plus importants dans le passé pour Eugenia et Minerva, alors que les âges restent vraiment similaires pour Sylvia et Kleopatra.

Nous pouvons voir que la rigidité  $\mu$ , la fonction dissipative  $Q$  et le paramètre BYORP  $B$  peuvent conduire à une imprécision d'un facteur 10 dans la détermination des échelles de temps. Nous obtenons même un âge dynamique plus grand que l'âge du système solaire ( $\sim 4.6$  Gyr) pour Eugenia.

#### 5.5.4 L'évolution opposée conjointe avec un paramètre BYORP différent pour chaque satellite

Jusque-ici, nous avons choisi une valeur unique du paramètre BYORP pour les satellites dans le cas de l'évolution opposée conjointe. Cependant, il est intéressant d'étudier la valeur de l'équilibre des demi-grands axes des satellites (5.9) en fonction de la valeur du paramètre  $B$  et de la masse de chacun des satellites.

Lorsque les deux satellites sont sujets à l'évolution opposée conjointe, le rapport final  $r^* = n_2^*/n_1^*$  des moyens mouvements (en considérant  $k_1 n_1^* = k_2 n_2^*$  où  $n_1^*$  et  $n_2^*$  sont respectivement les moyens mouvements à l'équilibre du satellite interne et du satellite externe) peut être écrit en utilisant la valeur d'équilibre des demi-grands axes de l'équation (5.9) :

$$r^* = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_2^*}{n_1^*} = \left( \frac{m_p + m_{s_2}}{m_p + m_{s_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^{3/14} \left( \frac{m_{s_1}}{m_{s_2}} \right)^{2/7}, \quad (5.10)$$

où nous considérons des valeurs différentes des paramètres BYORP des deux satellites  $B_1$  et  $B_2$ . Si nous supposons  $m_p \gg m_{s_1}, m_{s_2}$  et une densité similaire pour les deux satellites, nous avons :

$$r^* = \left( \frac{B_2}{B_1} \right)^{3/14} \left( \frac{R_{s_1}}{R_{s_2}} \right)^{6/7}, \quad (5.11)$$

où  $R_{s_1}$  et  $R_{s_2}$  sont les rayons des satellites. Le rapport  $r^*$  est tracé à la figure 5.5 pour trois valeurs différentes du rapport  $B_2/B_1$ , en fonction du rapport des rayons des satellites  $R_{s_1}/R_{s_2}$ . Les résonances en moyen mouvement sont aussi indiquées, de même que la limite de stabilité empirique ( $k_1/k_2 \simeq 0.811$ ) déterminée grâce à la figure 4.4. Nous supposons que les systèmes avec un rapport  $r^*$  dans la zone chaotique sont détruits alors que les systèmes dans les régions des résonances 3 : 2 et 4 : 3 peuvent être sévèrement déstabilisés.

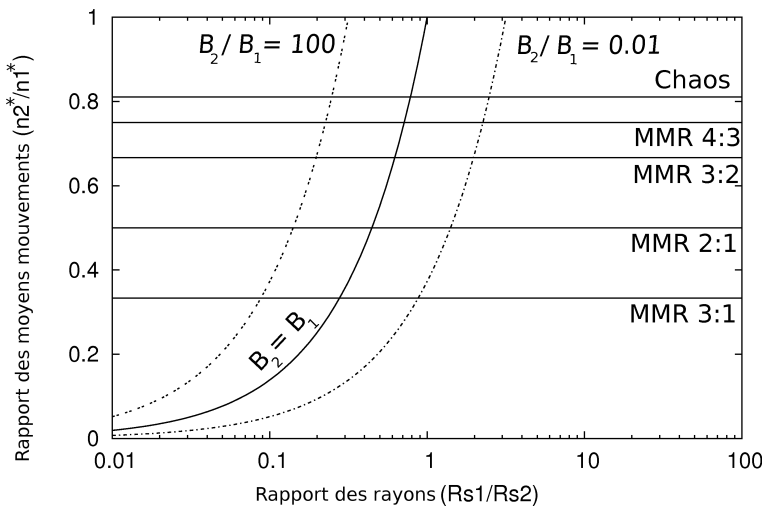


FIGURE 5.5 – Rapport des moyens mouvements à l'équilibre  $n_2^*/n_1^*$  en fonction du rapport des rayons des satellites  $R_{s_1}/R_{s_2}$  dans le cas de l'évolution opposée conjointe.

Si nous considérons des probabilités égales pour  $B_2 < B_1$  ou  $B_2 > B_1$ , la stabilité est favorisée pour les systèmes avec  $R_{s_1} < R_{s_2}$ . Le rapport  $r^* = n_2^*/n_1^*$  des systèmes avec  $R_{s_1} > R_{s_2}$  et  $B_2 > B_1$  est supérieur à 1, ce qui signifie que ces systèmes vont se détruire. De façon plus précise, on peut dire que pour survivre, les systèmes avec  $B_2 > B_1$  doivent avoir un rapport des rayons  $R_{s_1}/R_{s_2}$  inférieur à  $r_c^{6/7}$ , où  $r_c$  est la limite empirique de stabilité. Pour le système Sylvia, ceci mène à une limite du rapport des rayons de 0.78 (en utilisant la valeur empirique  $r_c \simeq 0.811$ ).

Les systèmes avec  $R_{s_1} > R_{s_2}$  et  $B_2 < B_1$  ne sont pas pour autant tous sauvés. Le rapport  $B_2/B_1$  doit être vraiment petit pour prévenir l'instabilité des systèmes avec des rapports de rayon  $R_{s_1}/R_{s_2}$  qui peuvent être aussi modérés que 2 ou 3.

Ces instabilités vont réduire globalement le nombre de systèmes triples avec  $R_{s_1} > R_{s_2}$ , c'est-à-dire ceux caractérisés par un satellite interne de rayon plus grand que celui du satellite externe.

### 5.5.5 La résonance d'évection

Repensons à présent au positionnement des satellites par rapport à la résonance d'évection (voir figure 4.8). Le petit nombre de systèmes disponibles nous empêche de faire des considérations statistiques. Mais nous pouvons utiliser les effets de marée et de BYORP qui font évoluer les satellites vers l'extérieur.

Considérons tout d'abord le fait que les satellites au-delà de la résonance d'évection en sont assez proches. En comparaison, la Lune serait localisée à  $\sim 31$  *aavec* sur la figure 4.8 (en utilisant, pour la Terre,  $J_2 = 1083 \times 10^{-6}$  et  $J_4 = -2 \times 10^{-6}$ ). En supposant qu'il n'y ait pas de biais d'observation, cette constatation laisse penser que la résonance d'évection est un moyen d'éjecter les satellites d'astéroïdes. Les effets de la résonance d'évection sont connus pour augmenter de façon drastique l'excentricité d'un satellite (Touma et Wisdom 1998; Ćuk et Nesvorný 2010). Par exemple, la figure 5.6 montre l'évolution chaotique de Romulus à l'intérieur de la résonance. Nous prenons comme conditions initiales pour cette intégration l'état du système (évoluant avec les paramètres  $\mu Q = 10^{10}$ ,  $B=10^{-3}$ ) lorsqu'il croise la résonance d'évection.

Une autre constatation pouvant confirmer cette hypothèse est le grand nombre de satellites, à très petite excentricité, localisés avant la résonance.

## 5.6 Conclusion

Nous avons étudié les évolutions possibles du système (87) Sylvia à travers les effets de marée et de BYORP et conclu que le système, actuellement situé entre les résonances en moyen mouvement 2 : 1 et 3 : 1, va évoluer vers la résonance d'évection avant d'atteindre la MMR 2 : 1.

Les autres systèmes triples connus considérés ici, à l'exception de (216) Kleopatra, se trouvent aussi entre la MMR 2 : 1 et la MMR 3 : 1. Nous avons analysé l'évolution de ces systèmes en fonction de différentes valeurs des paramètres de dissipation. Les résultats montrent que l'effet BYORP a un profond impact sur la stabilité des systèmes triples, si nous considérons les résonances en moyen mouvement et d'évection comme les principales sources d'instabilité.

La diversité des comportements des systèmes triples étudiés provient principalement du fait que l'effet BYORP est plus efficace pour des objets distants, alors que les marées agissent surtout sur les objets proches. Pour additionner ces différents effets, les cas d'évolution expansive conjointe et d'évolution op-

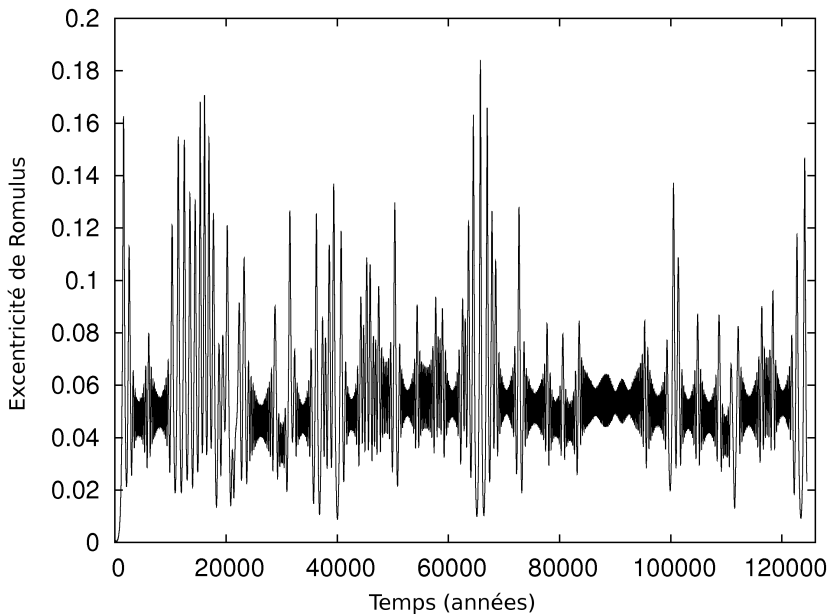


FIGURE 5.6 – Excentricité de Romulus à l'intérieur de la résonance d'évection.

posée conjointe doivent être traités séparément.

Dans le premier scénario, l'évolution des systèmes dépend de la prédominance de l'un des effets dissipatifs sur l'autre. Si l'effet BYORP domine, il peut maintenir les satellites loin des MMRs, mais aussi les emmener vers la résonance d'évection. Si les effets de marée dominent, l'effet BYORP augmente simplement la convergence des satellites.

Le futur des systèmes dans l'évolution opposée conjointe est plus facile à décrire puisque leur stabilité ne dépend que des paramètres BYORP et des masses des satellites. La connaissance de ces valeurs nous permet de déterminer les valeurs d'équilibre des moyens mouvements, et donc leur distance par rapport aux MMRs et aux zones d'instabilité. En particulier, nous avons montré que les systèmes dont le rayon du satellite interne est plus grand que celui du satellite externe sont condamnés à être détruits si le paramètre BYORP du satellite interne est plus petit que celui du satellite externe. Ceci est aussi vrai pour une petite fraction de systèmes où le rayon du satellite interne est plus petit que celui de l'externe. Cette fraction dépend de la limite effective de stabilité des satellites.

De façon générale, nous avons montré que la résonance d'évection peut

limiter l'évolution vers l'extérieur des satellites, ou au moins augmenter les excentricités du système, ce qui peut être justifié par la répartition actuelle des systèmes par rapport à la résonance.

Jusque-ici, nous avons considéré des évolutions où les deux satellites sont en évolution expansive conjointe ou en évolution opposée conjointe, et nous n'avons donc pas considéré la possibilité que les satellites aient une évolution radicalement différente par rapport à l'effet BYORP.

Troisième partie

Les astéroïdes doubles



# Chapitre 6

## Formation d'astéroïdes binaires dans la ceinture de Kuiper

Le contenu de ce chapitre a été réalisé en collaboration avec David Farrelly, Anne Lemaître et Daniel Hestroffer et est publié dans Compère *et al.* (2013).

### 6.1 Introduction

Les astéroïdes binaires dont les deux composantes sont fort distantes et de masses similaires sont courants dans la partie dynamiquement froide de la ceinture de Kuiper<sup>1</sup> (Noll *et al.*, 2008). Cependant, ils sont assez rares parmi les objets en résonance 3 : 2 en moyen mouvement avec Neptune (les Plutinos). Actuellement, un seul exemple de ces objets est connu, l'astéroïde binaire (341520) 2007 TY430, qui a été découvert très récemment (Sheppard *et al.*, 2012). Cette quasi-absence de binaires dans la résonance 3 : 2 de la ceinture de Kuiper (notés dans la suite KBBs pour *Kuiper belt binaries*), ou encore de binaires transneptuniens (notés TNBs pour *Trans-Neptunian binaries*), a été mise en évidence par Keith Noll dans une présentation au *Space Telescope Science Institute 2010 Hydra-Nix Meeting* dont le titre est : *KBO Multiples (Observations)*.<sup>2</sup>

---

1. La ceinture de Kuiper s'étend de 30 à 55 UA. La ceinture de Kuiper classique (entre 42 et 48 UA, donc entre la résonance 3 : 2 et la résonance 2 : 1 avec Neptune) est composée de deux populations distinctes : la population dynamiquement froide et la population dynamiquement chaude. La première possède des orbites de faible inclinaison et de faible excentricité. La seconde possède des orbites beaucoup plus inclinées. Ces populations furent nommées ainsi, non pas pour leur température, mais par analogie avec les particules d'un gaz dont la vitesse relative s'accroît avec la température.

2. Une vidéo de cette présentation est présente sur le site : <https://webcast.stsci.edu/webcast/detail.xhtml?talkid=1912&parent=1>.



Il est généralement admis que les KBBs sont des survivants des premiers stades de la formation du système solaire. Si c'est le cas, alors ces objets massifs et fragiles contiennent des informations sur la formation et l'évolution du système solaire. Par exemple, la localisation originelle des objets de la ceinture de Kuiper (notés KBOs pour *Kuiper belt objects*) reste un sujet de discussion. Différents modèles de formation du système solaire externe (Malhotra, 1995; Gomes, 2003; Levison et Morbidelli, 2003; Tsiganis *et al.*, 2005; Morbidelli *et al.*, 2005; Gomes *et al.*, 2005) font des prédictions différentes sur la localisation initiale et sur l'évolution des KBOs. Par exemple, dans le modèle de Nice (Tsiganis *et al.*, 2005; Morbidelli *et al.*, 2005; Gomes *et al.*, 2005), le disque protoplanétaire s'étendait seulement jusqu'à 30 - 35 UA et la ceinture de Kuiper actuelle était vide. La migration de Neptune aurait ensuite amené des particules jusqu'à leur position actuelle dans la ceinture de Kuiper. (le terme ceinture de Kuiper se réfère à la position actuelle des KBOs.)

Le modèle de Nice suggère que les corps ont été transférés vers la ceinture de Kuiper lorsque l'excentricité de Neptune a augmenté temporairement. Pour des valeurs de cette excentricité supérieures à 0.15, plusieurs résonances en moyen mouvement se chevauchent et une large mer de chaos est formée, ce qui aurait permis aux particules de se retrouver jusque dans la ceinture de Kuiper. Après que l'excentricité de Neptune ait diminué, la mer de chaos s'est reculée et les objets de la ceinture de Kuiper ont été capturés (Levison *et al.*, 2008). Cependant, le modèle de Nice présente des problèmes en ce qui concerne la formation des KBBs. Par exemple, des calculs récents (Parker et Kavelaars, 2010) suggèrent que n'importe quelle population primordiale de binaires très séparés située à moins de 35 UA aurait été décimée par des rencontres proches avec Neptune. Deux alternatives sont proposées : (i) les binaires ont été formés *in situ*, c'est-à-dire à leur position actuelle ou (ii) les binaires ont été transportés jusqu'à la ceinture de Kuiper par un mécanisme "plus doux" (non spécifié).

Des modèles alternatifs de formation du système solaire (Malhotra, 1995; Gomes, 2003) postulent que le disque protoplanétaire s'étendait jusqu'au moins ~50 UA. Dans ces modèles, les KBOs sont divisés en deux grandes catégories : la population résonante et chaude de la ceinture classique (les KBOs à grande inclinaison) et la population froide de la ceinture classique (les KBOs à faible inclinaison). La première population résulte de la migration de Neptune tandis que la seconde a été formée *in situ* et a seulement été légèrement perturbée par les phases de balayage des résonances. Dans ce scénario, la quasi-absence de binaires parmi les Plutinos est expliquée assez facilement : contrairement aux KBBs de la population froide, les Plutinos ont essuyé des rencontres proches avec Neptune, ce qui a éliminé tout KBB existant préalablement ou empêché la formation de binaires. Ce cas est traité plus en détail dans Murray-Clay et Schlichting (2011).

Parce que le modèle de Nice explique plus de caractéristiques de la ceinture de Kuiper que ne le font les modèles alternatifs (Levison *et al.*, 2008), nous allons ici nous focaliser sur ce modèle. Le travail de Parker et Kavelaars (2010), combiné avec le modèle de Nice, suggère que la formation des binaires a eu lieu *in situ* dans la ceinture de Kuiper, mais après que l'excentricité de Neptune ait diminué. Cette hypothèse est renforcée indirectement par les simulations récentes de *N*-corps de Kominami *et al.* (2011). Le scénario considéré ici est le suivant : premièrement, même si des binaires ont été créés lors des premiers stades du système solaire, la plupart d'entre eux ont été détruits pendant la migration de Neptune (Parker et Kavelaars, 2010). Ensuite, une seconde période de formation a eu lieu, lors des derniers stades de la migration de Neptune. Dans ce chapitre, nous essayons de comprendre le peu de binaires formés parmi les Plutinos pendant cette période. Nous considérons deux époques : après la diminution de l'excentricité de Neptune et juste après la dernière rencontre proche de Neptune avec Uranus, c'est-à-dire lorsque la valeur de l'excentricité de Neptune a été la plus grande (jusqu'à  $\approx 0.3$  avant qu'elle ne redescende à sa valeur actuelle en à peu près un million d'années). Nous appelons l'époque la plus récente *Neptune-circulaire* et nous considérons pour Neptune un demi-grand axe égal à 30.0940 UA et une orbite circulaire (proche du système actuel). L'époque antérieure est appelée *Neptune-excentrique* avec pour Neptune un demi-grand axe égal à 27.5 UA et une excentricité de 0.3. Nous discuterons des cas intermédiaires dans la conclusion.

Plusieurs mécanismes de formation de binaires ont été proposés et chacun d'entre eux donne des prévisions différentes pour les propriétés physiques et orbitales des KBBs. De manière générale, ces mécanismes de formation peuvent être séparés en trois classes : les mécanismes de collision, les mécanismes de capture et les mécanismes d'effondrement gravitationnel. Nous les résumons brièvement ici.

Dans le modèle de collision de Weidenschilling (2002), deux objets se percutent dans la sphère de Hill d'un troisième. Ces deux objets fusionnent en un seul et produisent alors un binaire avec le troisième. Cependant, ce mécanisme dépend de l'existence de corps plus massifs (d'approximativement deux ordres de grandeur) dans la ceinture de Kuiper primordiale que les estimations actuelles (voir Astakhov *et al.* (2005)).

Les modèles de capture de Goldreich *et al.* (2002) supposent que deux objets pénètrent mutuellement la sphère de Hill de l'autre et sont ensuite stabilisés soit par une friction dynamique (le mécanisme  $L^2$ ), soit par une rencontre proche (amenant une dissipation d'énergie) avec un troisième objet de taille similaire (le mécanisme  $L^3$ ). Funato *et al.* (2004) proposent un modèle hybride de collision-capture. Initialement, deux objets se percutent pour produire un binaire dont les composantes ont des masses assez différentes. Par la suite, des réactions d'échange avec d'autres corps plus massifs déplacent le corps le moins

massif et augmentent le rapport des masses. Ce mécanisme donne souvent des binaires ayant des partenaires de tailles similaires. Cependant, il conduit à des propriétés orbitales (en particulier les excentricités mutuelles) différentes de celles qu'on observe actuellement (Noll, 2003; Noll *et al.*, 2004; Astakhov *et al.*, 2005). Un autre scénario de capture, le *chaos-assisted capture* (CAC) (Astakhov *et al.*, 2005; Lee *et al.*, 2007) suppose que deux objets pénètrent mutuellement la sphère de Hill de l'autre et se retrouvent sur des orbites chaotiques à l'intérieur de leur sphère de Hill mutuelle, mais sans collisions ou échappées. Pendant cette phase, ce proto-binaire est capturé de façon permanente, et donc confirmé comme binaire, grâce à des rencontres multiples avec des petits corps "intrus" amenant de la dissipation. Le modèle CAC explique plusieurs propriétés particulières des KBBs : une propension pour des partenaires de tailles plus ou moins équivalentes, des orbites mutuelles modérément excentriques (les excentricités très grandes et très faibles sont rares), des demi-grands axes mutuels assez grands et toute une large gamme d'inclinaisons mutuelles. De plus, des simulations récentes de N-corps (Kominami *et al.*, 2011) arrivent à la conclusion que le scénario CAC émerge naturellement de leurs calculs.

Enfin, Nesvorný *et al.* (2010) ont proposé récemment un modèle dans lequel les KBBs se sont formés par effondrement gravitationnel. Des considérations sur le moment angulaire dans le disque protoplanétaire expliqueraient la formation de binaires plutôt que l'agrégation en un seul objet. Ce modèle d'instabilité gravitationnel prédit des compositions et couleurs identiques pour les partenaires des KBBs ainsi que des inclinaisons généralement faibles ( $i \leq 50^\circ$ ). De plus, les orbites mutuelles rétrogrades seraient rares. Cependant, trop peu d'informations concernant les inclinaisons réelles des orbites mutuelles des KBBs sont actuellement disponibles, même si des projets ont été imaginés afin de disposer de ces informations (par exemple Farrelly *et al.* (2006)). Des résultats récents, par contre (Grundy *et al.*, 2011), ne confirment pas cette asymétrie entre progrades et rétrogrades, même sur de petits échantillons.

Ici, nous allons nous focaliser sur les scénarios de capture, surtout dans le contexte d'une formation tardive. La première étape de ces modèles est la capture temporaire de deux corps en un proto-binaire. La seconde est la capture en un binaire permanent via un mécanisme de dissipation qui dépend du modèle utilisé (voir Lee *et al.* (2007)). Nous nous intéressons surtout ici à la première étape de formation de KBBs dans les modèles de capture : en particulier, des proto-binaires avec une longue durée de vie, peuvent-ils se créer dans la résonance 3 : 2 avec Neptune ?

La stabilité d'un proto-KBB est étudiée sous l'influence combinée du Soleil et de Neptune, les deux corps massifs les plus importants dans ce contexte. Nous utilisons deux modèles dynamiques : le problème de Hill perturbé de Chauvineau et Mignard (1990a,b) et le problème des 2 + 2 corps de Whipple et Szebehely (1984) et Whipple et White (1985). Les corps principaux (le So-

leil et Neptune) ne sont pas perturbés par les deux petits corps (les partenaires du proto-binaire), qui sont considérés comme des masses ponctuelles (avec des masses de l'ordre de  $10^{18}$  kg contre  $10^{30}$  kg pour le Soleil et  $10^{26}$  kg pour Neptune).

L'idée générale est d'intégrer les équations du mouvement planes pour des KBBs tests situés soit dans la résonance 3 : 2, soit dans la ceinture de Kuiper classique. Dans un premier temps, nous utilisons l'indicateur de chaos MEGNO (défini dans la section 2.1) pour déterminer si les zones de stabilité entourées de chaos sont détruites par la résonance. Dans un deuxième temps, nous calculons les temps de résidence des proto-binaires (le temps qu'un astéroïde binaire passe à l'intérieur de la sphère de Hill mutuelle, voir Astakhov et Farrelly (2004)) de centaines de milliers de binaires tests, pour vérifier si le nombre de couples formés est différent ou non dans le cas résonant.

La première section explique en détail les outils numériques que nous utiliserons tout au long du chapitre. Nous travaillons tout d'abord avec le modèle de Hill perturbé (Section 6.3). Cependant, ce modèle va rapidement montrer ses limites, ce qui nous contraindra à utiliser le second modèle, à savoir le problème des 2 + 2 corps (Section 6.4). Tout d'abord, le centre de masse du KBB évolue sur une orbite plane et circulaire autour du Soleil. Ensuite, en prenant en compte le fait que la résonance augmente l'excentricité, le centre de masse est placé sur une orbite excentrique. Enfin, nous introduisons la troisième dimension spatiale dans le modèle, pour modéliser les inclinaisons non nulles.

Nous allons découvrir qu'une excentricité non nulle pour le centre de masse (excité par la résonance) détruit les îles de stabilité principales dans les cartes de chaos. Ceci signifie que peu de binaires sont créés. Cela sera confirmé par les histogrammes de temps de résidence.

## 6.2 Méthodes numériques et indicateurs de chaos

Les simulations ont été réalisées avec un intégrateur numérique Adams-Bashforth-Moulton prédictor-correcteur d'ordre 10 (Hairer *et al.*, 2008), déjà implémenté et utilisé dans Verheylewegen *et al.* (2013) (notamment pour un problème des N-corps).

Le premier indicateur utilisé est la surface de section (SOS pour *Surface Of Section*, au singulier et au pluriel). Les SOS sont calculées comme suit : une grille de conditions initiales est intégrée jusqu'à un temps prédéterminé. Lorsque la trajectoire traverse le plan  $y = 0$  avec un  $\dot{y}$  positif, le point est enregistré. Une trajectoire traçant dans la SOS une courbe solide signifie une trajectoire quasi-périodique, tandis qu'une trajectoire qui remplit une surface à deux dimensions indique un mouvement chaotique.

Afin de distinguer les orbites régulières des orbites chaotiques, nous utilisons un second outil, l'indicateur MEGNO présenté dans la section 2.1. L'intégration d'une orbite est stoppée si sa valeur du MEGNO atteint 5. Sur les cartes, les points ayant une valeur égale à 10 correspondent à des orbites instables qui s'échappent avant la fin de la simulation.

Le dernier outil utilisé est la simulation de Monte Carlo comme dans Astakhov *et al.* (2003). Premièrement, un ensemble d'astéroïdes tests est choisi de façon aléatoire dans la sphère de Hill. Nous laissons chaque système évoluer jusqu'à ce que l'un de des événements suivants arrive : l'astéroïde quitte la sphère de Hill ou il survit pendant un certain temps prédéterminé. Pour la seconde étape, nous utilisons ces conditions finales pour effectuer des intégrations dans le passé jusqu'à ce que, de nouveau, l'astéroïde quitte la sphère de Hill ou qu'il atteigne un certain temps prédéterminé. Le temps total de ces intégrations nous donne le temps de résidence de l'astéroïde dans la sphère de Hill, c'est-à-dire le temps pendant lequel l'astéroïde reste à l'intérieur de la sphère de Hill. La raison pour laquelle nous intégrons aussi dans le passé est que, lorsque nous prenons des conditions initiales au hasard, certaines d'entre elles vont s'échapper presque immédiatement parce qu'elles ont été prises "sur leur chemin vers la sortie" de la sphère de Hill. En faisant une intégration dans le passé, leur temps de résidence total est calculé précisément. Nous traçons alors les histogrammes des temps de résidence de toutes les conditions initiales.

## 6.3 Le problème de Hill perturbé

Le problème de Hill (voir Chauvineau et Mignard (1990a)) décrit le mouvement de deux particules (ici, deux astéroïdes) subissant leur attraction mutuelle et l'attraction d'un corps massif distant (ici, le Soleil). Le problème de Hill perturbé est le problème de Hill dans lequel l'effet d'un corps de masse intermédiaire entre le corps massif et les deux particules est ajouté. Ce modèle est décrit dans Chauvineau et Mignard (1990b) pour des astéroïdes de la ceinture principale perturbés par Jupiter. Nous allons ici utiliser ce modèle pour décrire des astéroïdes de la ceinture de Kuiper perturbés par Neptune. Nous considérons un modèle à deux dimensions.

### 6.3.1 Modèle

Deux astéroïdes (de masses  $m_1$  et  $m_2$ ) sont en rotation autour de leur centre de masse, noté CM, lui-même en rotation autour du Soleil (de masse  $M_\odot$ ). Nous définissons  $\vec{R}$ , le vecteur joignant le Soleil à CM,  $\vec{\delta}$  (de norme  $\delta$ ), le vecteur joignant l'astéroïde de masse  $m_2$  à celui de masse  $m_1$  et  $\omega$  la norme de la vitesse angulaire du CM autour du Soleil. Nous notons aussi  $G$ , la constante de gravitation. Choisissons un repère absolu  $(X, Y)$  centré sur le Soleil et un repère

tournant  $(x, y)$  centré sur le CM, avec l'axe  $x$  aligné avec  $\vec{R}$ , comme présenté à la figure 6.1. Nous supposons ici que le mouvement du CM est circulaire, de rayon  $R = \|\vec{R}\|$  autour du Soleil. Appelons  $M'$  la masse de la planète et  $\vec{R}'$  le vecteur joignant le Soleil à la planète, sur une orbite circulaire autour du Soleil. Nous définissons aussi  $\mu = M'/M_\odot$ ,  $p = \|\vec{R}'/\vec{R}\|$ ,  $S$  l'élongation angulaire de la planète par rapport au barycentre, vue depuis le Soleil et  $S'$  l'élongation angulaire de la planète par rapport à la ligne Soleil-barycentre, vue depuis le barycentre (voir Chauvineau et Mignard (1990b) et la figure 6.1).

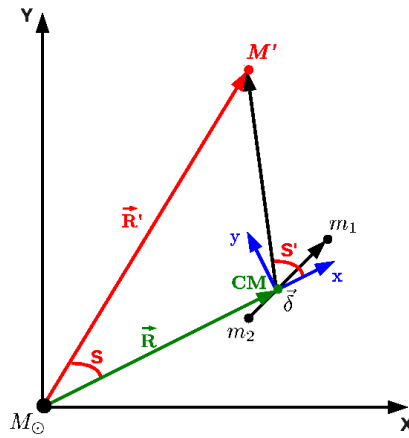


FIGURE 6.1 – Définitions et notations pour le problème de Hill perturbé.

Chauvineau et Mignard (1990a) introduisent des normalisations pour simplifier le problème :

$$\begin{aligned} \omega &= 1, \\ m &= m_1 + m_2 = 3, \\ G &= 1. \end{aligned} \tag{6.1}$$

La première normalisation définit l'unité de temps, la seconde, l'unité de masse et la troisième, l'unité de longueur.

Nous nous intéressons au mouvement local des deux astéroïdes autour de leur centre de masse. Nous étudions donc l'évolution du vecteur  $\vec{\delta}$ . Dans le repère tournant et avec les normalisations (6.1), le mouvement de  $\vec{\delta}$  est donné par le système différentiel suivant (Chauvineau et Mignard, 1990b) :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} &= 3x - 3x/\delta^3 \\ &\quad + \mu f(t)[(3 \cos^2(S'(t)) - 1)x + 3 \cos(S'(t)) \sin(S'(t))y], \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -3y/\delta^3 \\ &\quad + \mu f(t)[(3 \sin^2(S'(t)) - 1)y + 3 \cos(S'(t)) \sin(S'(t))x], \end{cases} \tag{6.2}$$

où  $f(t) = [1 + p^2 - 2p \cos(S(t))]^{-3/2}$  avec  $S(t) = (p^{-3/2} - 1)t$  et

$$\begin{cases} \sin(S'(t)) &= \frac{p \sin(S(t))}{(1 + p^2 - 2p \cos(S(t)))^{1/2}}, \\ \cos(S'(t)) &= \frac{-1 + p \cos(S(t))}{(1 + p^2 - 2p \cos(S(t)))^{1/2}}. \end{cases} \quad (6.3)$$

Les termes  $-2\dot{y}$  et  $+2\dot{x}$  sont dus à l'accélération de Coriolis causée par la rotation du repère. Le terme  $3x$  provient de la force centrifuge causée par la rotation du repère et par le Soleil et les termes en  $\mu f(t)$  sont dus à l'influence de la planète.

Sans l'influence de la planète, les points d'équilibre sont  $(\pm 1, 0)$  et correspondent aux points de Lagrange  $L_1$  et  $L_2$ . Une intégrale première, similaire à l'intégrale de Jacobi du problème restreint des trois corps, est présente :

$$-\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + 3x^2 + 6/\delta = C, \quad (6.4)$$

où  $C$  est constant le long d'une trajectoire, mais change de valeur de l'une à l'autre. Par exemple,  $C$  est égal à 9 aux points d'équilibre.

Cependant, si nous considérons l'influence de la planète,  $C$  dans (6.4) n'est plus une intégrale du mouvement. Nous l'appellerons dans la suite la *fonction de Jacobi* et nous la noterons  $J(t)$  le long d'une trajectoire :

$$-\dot{x}^2(t) - \dot{y}^2(t) + 3x^2(t) + 6/\delta(t) = J(t). \quad (6.5)$$

Dans les simulations, nous vérifions si les deux astéroïdes forment réellement un proto-binaire (c'est-à-dire si les deux astéroïdes sont effectivement en rotation autour de leur centre de masse). Pour cela, nous introduisons la sphère de Hill mutuelle. Dans notre cas, la sphère de Hill est la sphère centrée au CM qui détermine le volume dans lequel l'attraction mutuelle des astéroïdes domine l'attraction du Soleil (voir Murray et Dermott (2000); Goldreich *et al.* (2004)). Le rayon de cette sphère, appelé le rayon de Hill, est défini par :

$$R_{Hill} = R \sqrt[3]{\frac{m_1 + m_2}{3M}}. \quad (6.6)$$

Avec les unités choisies (6.1), le rayon de Hill est égal à 1. Donc, si la distance entre les deux partenaires binaires potentiels est plus petite que 1, les deux astéroïdes forment un proto-binaire. À l'inverse, si la distance est plus grande que 1, les deux astéroïdes ont une orbite héliocentrique et ne forment pas un binaire.

### 6.3.2 Conditions initiales

Les conditions initiales sont choisies de la façon suivante : nous fixons d'abord la fonction de Jacobi initiale  $J(0)$  ainsi que  $x(0)$  et  $y(0)$ , entre  $-1$  et  $1$  de façon à ce que les astéroïdes soient dans la sphère de Hill de leur centre de masse. Nous choisissons ensuite  $\dot{x}(0) = 0$  et  $\dot{y}$  doit satisfaire l'égalité (6.5) en  $t = 0$  :

$$\dot{y}(0) = \sqrt{3x^2(0) + 6/\delta(0) - J(0)}. \quad (6.7)$$

Le mouvement existe seulement si  $3x^2(0) + 6/\delta(0) - J(0) \geq 0$ . Nous choisissons dans (6.7) le signe positif pour  $\dot{y}(0)$ . Cependant, le cas négatif donne les mêmes résultats que le cas positif avec comme conditions initiales :

$$(-x(0), -y(0), 0, -\dot{y} = -\sqrt{3x^2(0) + 6/\delta(0) - J(0)}).$$

Les cartes de MEGNO sont les mêmes dans le cas négatif que dans le cas positif moyennant des symétries axiales d'axes  $x = 0$  et  $y = 0$ . Les simulations de Monte Carlo ne sont pas affectées par ce choix.

Puisque l'orbite de la planète est circulaire, nous ne pourrions étudier avec ce modèle que le cas *Neptune-circulaire* et non le cas *Neptune-excentrique*. La distance  $R'$  de Neptune au Soleil vaut 30.0940 UA.

Les masses sont fixées à  $1.98892 \times 10^{30}$  kg pour le Soleil ( $M_\odot$ ) et  $1.02410 \times 10^{26}$  kg pour Neptune ( $M'$ )<sup>3</sup>. Puisque nous nous intéressons à des astéroïdes binaires de masses similaires, nous travaillons avec  $m_1 = m_2$ . Nous approximations la masse de chaque astéroïde par  $2.0 \times 10^{18}$  kg, ce qui est similaire au primaire du système 1998 WW<sub>31</sub> (voir Veillet *et al.* (2002)). Cependant, les résultats sont similaires pour des masses plus faibles, jusqu'à  $2.0 \times 10^{17}$  kg au moins. Cette valeur correspond à une sphère avec un diamètre d'environ 90 km avec une estimation raisonnable de densité de masse de  $1.5 \text{ g/cm}^3$ . Cet intervalle de masses est en accord avec la base de données *Asteroids/TNOs with Satellites : Summary Data* de Wm. Robert Johnston<sup>4</sup>.

### 6.3.3 Cartes de MEGNO avec le problème de Hill perturbé

Dans cette sous-section, nous présentons des cartes de MEGNO réalisées avec le problème de Hill plan perturbé (avec le CM dans la résonance ou en dehors). Des surfaces de section ont aussi été effectuées avec le problème de Hill (donc sans la perturbation planétaire) et sont similaires aux figures présentées dans Chauvineau et Mignard (1990a). Des simulations tests réalisées avec le problème de Hill perturbé donnent des résultats équivalents à ceux de

3. Voir <http://ssd.jpl.nasa.gov/>

4. Accessible à l'adresse <http://www.johnstonsarchive.net/astro/asteroidmoons.html>



Chauvineau et Mignard (1990b).

Les cartes de MEGNO montrent des caractéristiques similaires à celles des SOS. La méthode SOS, qui est graphique, a des restrictions lorsqu'on travaille avec des systèmes à plus de deux degrés de liberté. À l'inverse, l'indicateur MEGNO a déjà fait ses preuves avec plusieurs degrés de liberté (comme ce sera le cas dans la suite) (Gamboa Suárez *et al.*, 2010; Maffione *et al.*, 2011). De plus, le MEGNO a l'avantage de mettre en évidence les résonances et de distinguer clairement les conditions initiales menant à des orbites chaotiques ou pas. De plus, les régions "interdites" de l'espace de phase sont plus faciles à visualiser en utilisant le MEGNO : dans les cartes de MEGNO, les conditions non réelles (interdites) sont en blanc. Dans la suite, nous utiliserons donc cet outil plutôt que les SOS.

Dans les cartes de MEGNO, chaque point d'une grille de  $150 \times 150$  conditions initiales correspond à la valeur du MEGNO associée à l'orbite après 10 000 ans et avec un pas d'une heure. Dans la résonance, le rayon  $R$  est égal à 39.4343 UA et nous choisissons  $R = 45$  UA pour analyser la situation en dehors de la résonance. Ce choix est motivé par le fait que, dans ce cas, les deux astéroïdes sont dans la ceinture de Kuiper classique, ce qui signifie qu'ils ne sont influencés par aucune résonance avec Neptune. Cependant, nos résultats restent inchangés si nous prenons par exemple  $R = 40$  UA à la place de  $R = 45$  UA.

La figure 6.2 présente des cartes de MEGNO du problème de Hill perturbé avec le centre de masse de l'astéroïde dans la ceinture de Kuiper classique ou dans la résonance. La partie gauche de chaque graphe correspond à des orbites rétrogrades alors que la partie droite correspond à des orbites progrades. Les orbites progrades sont très régulières pour de grandes valeurs de  $J(0)$  (cartes (e) et (f)). Lorsque  $J(0)$  décroît, des zones chaotiques apparaissent (cartes (c) et (d)) allant jusqu'à des cartes principalement composées d'orbites s'échappant de la sphère de Hill pour des valeurs de  $J(0)$  très faibles (cartes (a) et (b)). Les orbites rétrogrades ne sont pas autant influencées par la valeur de  $J(0)$  que les orbites progrades. Remarquons que les orbites rétrogrades semblent en moyenne plus stables que les orbites progrades. Ce phénomène n'est pas étudié en détail ici mais coïncide avec les résultats de Chauvineau et Mignard (1990a).

La question reste de savoir s'il existe une différence de stabilité entre les orbites dans la résonance 3 : 2 avec Neptune et celles en dehors de celle-ci. Comme nous pouvons le voir à la figure 6.2, il n'y a pratiquement aucune différence entre ces deux cas. Les régions stables entourées de chaos ne sont ni agrandies, ni détruites. Nous ne pouvons donc rien conclure à propos de la formation des astéroïdes binaires, ce qui n'est pas très encourageant en prélude de l'étape suivante de notre étude : le calcul des temps de résidence.

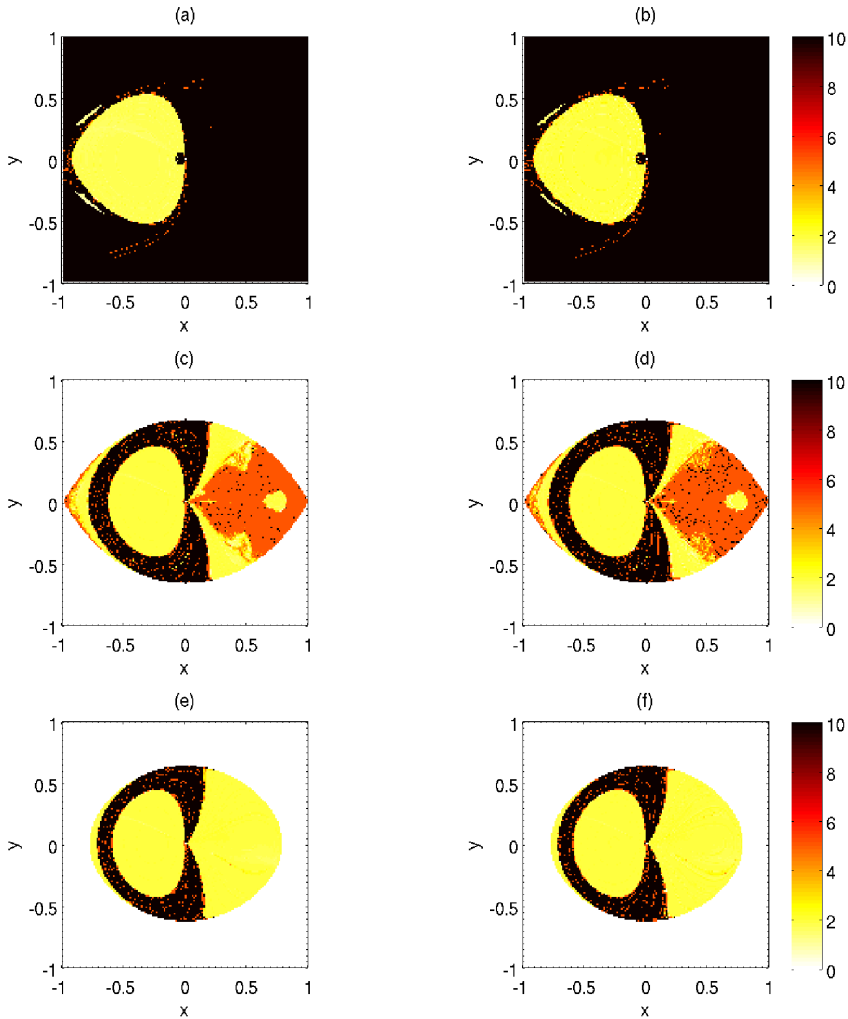


FIGURE 6.2 – Cartes de MEGNO du problème de Hill perturbé. Les cartes de gauche sont réalisées avec le CM dans la ceinture de Kuiper classique ( $R = 45$  UA) et celles de droite avec le CM dans la résonance 3 : 2 avec Neptune ( $R = 39.4343$  UA). Les valeurs de la fonction de Jacobi initiale  $J(0)$  sont de haut en bas : 6, 9 et 9.5.

### 6.3.4 Temps de résidence avec le problème de Hill perturbé

Nous effectuons des simulations de Monte Carlo avec ce modèle, dans la résonance et en dehors. Les conditions initiales sont choisies de la façon suivante :  $J(0)$  est pris aléatoirement dans  $[3, 20]$  et  $x(0)$  et  $y(0)$  sont pris aléatoirement dans  $[-1, 1]$ . Les bornes pour  $J(0)$  sont choisies de telle façon que suffisamment de conditions initiales soient réelles (donc  $J(0)$  n'est pas trop grand) et non chaotiques dans le cas résonant (donc  $J(0)$  n'est pas trop petit). 100 000 conditions initiales sont créées (mais seules les conditions initiales réelles parmi celles-ci sont intégrées) et le temps prédéterminé est de 10 000 ans.

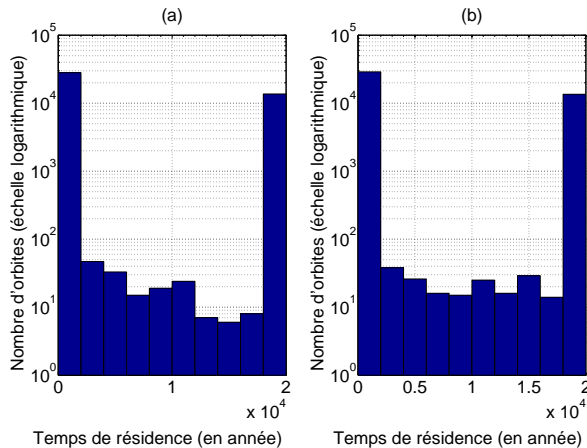


FIGURE 6.3 – Distribution des temps de résidence (à l'échelle logarithmique) de 100 000 astéroïdes dans la sphère de Hill du CM dans le problème de Hill perturbé plan. Dans (a), le CM est dans la ceinture principale ( $R = 45$  UA) et dans (b), CM se trouve dans la résonance 3 : 2 avec Neptune ( $R = 39.4343$  UA).

Les résultats obtenus sont présentés à la figure 6.3. Puisque le nombre d'orbites pour chaque classe est donné en échelle logarithmique, les astéroïdes sont principalement séparés en deux catégories : les astéroïdes qui se séparent avant 2000 ans et les astéroïdes formant un binaire pendant plus de 20 000 ans. Ces histogrammes ne montrent pas de réelles différences entre les simulations dans la résonance et celles en dehors, ce qui nous pousse à changer de modèle. Nous aurions pu ajouter une excentricité au centre de masse des astéroïdes dans le modèle de Hill perturbé mais nous avons préféré utiliser un modèle plus complet : le problème des 2+2 corps.

## 6.4 Le problème des 2+2 corps plan circulaire

Nous présentons ici le problème des 2+2 corps de Whipple et Szebehely (1984) et Whipple et White (1985). Il s'agit d'un problème des 4 corps simplifié dans lequel Neptune suit une orbite keplerienne autour du Soleil tandis que les deux astéroïdes interagissent entre eux tout en étant perturbés par le Soleil et par Neptune. Nous commençons avec une version plane et circulaire de ce problème.

### 6.4.1 Modèle

Le repère inertiel est centré sur le Soleil, l'axe  $x$  est choisi dans la direction du centre de masse (CM) initial des deux astéroïdes et l'axe  $y$  est perpendiculaire à l'axe  $x$  dans le plan de rotation du CM. Les équations du mouvement pour les coordonnées du premier astéroïde  $\vec{r}_1$ , du second  $\vec{r}_2$  et de Neptune  $\vec{r}_N$  sont (Whipple et Szebehely, 1984) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{GM_\odot \vec{r}_1}{\|\vec{r}_1\|^3} - \frac{Gm_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} - \frac{GM'(\vec{r}_1 - \vec{r}_N)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_N\|^3}, \\ \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{GM_\odot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_2\|^3} - \frac{Gm_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} - \frac{GM'(\vec{r}_2 - \vec{r}_N)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_N\|^3}, \\ \ddot{\vec{r}}_N = -\frac{G(M_\odot + M')\vec{r}_N}{\|\vec{r}_N\|^3}, \end{array} \right. \quad (6.8)$$

où  $G$  est la constante de gravitation et  $M_\odot$ ,  $M'$ ,  $m_1$  et  $m_2$  sont respectivement la masse du Soleil, de Neptune, du premier astéroïde et du second.

Nous introduisons les normalisations (6.1) pour simplifier le problème :

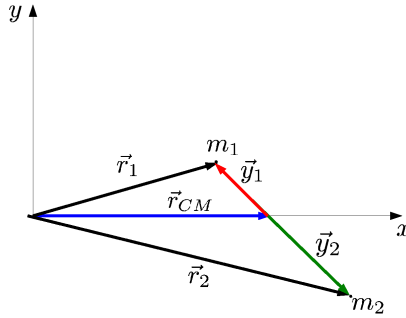
$$\begin{aligned} \omega(0) &= 1, \\ m &= m_1 + m_2 = 3, \\ G &= 1. \end{aligned} \quad (6.9)$$

où  $\omega(t)$  est la norme de la vitesse angulaire du CM autour du Soleil (non nécessairement constante cette fois-ci). Nous utiliserons à nouveau le rayon de Hill toujours égal à 1.

### 6.4.2 Conditions initiales

L'orbite initiale de Neptune, qui est keplerienne, est décrite en coordonnées kepleriennes et transformée par la suite en coordonnées cartésiennes. Pour le cas *Neptune-circulaire*, le demi-grand axe initial est égal à 30.0940 UA et l'excentricité est nulle. Pour le cas *Neptune-excentrique*, le demi-grand axe initial

est égal à 27.5 UA et l'excentricité à 0.3. Dans tous les cas, la longitude du péri-centre et l'anomalie moyenne sont égales à 0. Nous avons vérifié que les résultats étaient similaires avec une longitude du péri-centre ou une anomalie moyenne non nulle. Les conditions initiales du CM sont données en coordonnées keple-riennes et puis transformées en coordonnées cartésiennes. L'excentricité initiale est, pour l'instant, égale à 0 et le demi-grand axe dépend des cas étudiés (selon que le binaire est dans la résonance 3 : 2 avec Neptune ou pas). La longitude du péri-centre et l'anomalie moyenne sont égales à 0 (pour rappel, l'axe des  $x$  est dans la direction du CM initial).



Nous considérons la position initiale des astéroïdes :

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r}_{CM} + \vec{y}_1, \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_{CM} + \vec{y}_2,\end{aligned}\tag{6.10}$$

où  $\vec{r}_{CM}$  est le vecteur position du CM (ce vecteur au temps initial est déjà déterminé) et  $\vec{y}_1 = (x_1, y_1)$  et  $\vec{y}_2 = (x_2, y_2)$  sont liés entre eux par la relation  $m_1\vec{y}_1 + m_2\vec{y}_2 = 0$ . Pour les vecteurs initiaux  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$ , nous travaillons à l'échelle locale et nous considérons que les deux astéroïdes forment un problème des deux corps autour de leur CM mutuel. Avec cette hypothèse, l'énergie "locale" pour le premier astéroïde (correspondant à l'énergie du problème des deux corps), définie par :

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{\|\vec{y}_1\|},\tag{6.11}$$

reste constante. Nous travaillons de nouveau avec  $m_1 = m_2$ . Avec les normalisations (6.9), l'énergie s'écrit :

$$\overline{E} = \frac{1}{2}(\dot{\overline{x}}_1^2 + \dot{\overline{y}}_1^2) - \frac{\overline{m}_1^3}{9} \frac{1}{\|\overline{\vec{y}}_1\|},\tag{6.12}$$

où les barres représentent des variables normalisées (les barres seront omises à partir d'ici). Les conditions initiales pour les astéroïdes sont calculées en deux

étapes. D'abord, nous fixons l'énergie initiale  $E$  et  $x_1(0)$  et  $y_1(0)$  sont choisis entre  $-0.5$  et  $0.5$  (pour que  $\|\vec{y}_1(0) - \vec{y}_2(0)\| \leq 1$  et donc que les deux astéroïdes soient dans leur sphère de Hill mutuelle). Nous choisissons ensuite  $\dot{x}_1(0) = 0$  et  $\dot{y}_1(0)$  doit satisfaire l'intégrale d'énergie (6.12) :

$$\dot{y}_1(0) = \sqrt{2E + \frac{2m_1^3}{9} \frac{1}{\|\vec{y}_1(0)\|}}. \quad (6.13)$$

Les commentaires concernant l'équation (6.13) sont similaires à ceux donnés pour l'équation (6.7).

Les masses sont toujours fixées à  $1.98892 \times 10^{30}$  kg pour le Soleil ( $M_\odot$ ),  $1.02410 \times 10^{26}$  kg pour Neptune ( $M'$ ) et  $2.0 \times 10^{18}$  kg pour les astéroïdes ( $m_1$  et  $m_2$ ). Les résultats sont similaires pour des masses plus faibles, jusqu'à  $2.0 \times 10^{17}$  kg au moins.

### 6.4.3 Cartes de MEGNO avec le problème des 2+2 corps plan circulaire

Dans cette section, nous présentons des cartes de MEGNO pour le problème des 2 + 2 corps plan et circulaire (avec le CM dans la résonance 3 : 2 avec Neptune ou dans la ceinture classique). Pour les cartes, chaque point d'une grille de  $250 \times 250$  conditions initiales correspond à la valeur du MEGNO associé à l'orbite après 10 000 ans avec un pas d'une heure. Comme pour le problème de Hill perturbé, les valeurs positives de  $x$  dans chaque graphique correspondent à des orbites progrades alors que les négatives correspondent à des orbites rétrogrades.

Afin de déterminer les différences de stabilité entre les orbites dans la résonance 3 : 2 avec Neptune et celles en dehors, nous construisons des cartes de MEGNO du problème des 2+2 corps avec le centre de masse de l'astéroïde dans la résonance ou dans la ceinture classique. Nous nous intéressons dans un premier temps au cas *Neptune-circulaire*. Dans la résonance, le rayon  $R$  est égal à 39.4343 UA et nous choisissons  $R = 45$  UA pour analyser la situation dans la ceinture de Kuiper classique (les résultats sont similaires avec  $R = 40$  UA).

Les résultats sont présentés à la figure 6.4. Nous pouvons premièrement analyser les cartes en dehors de la résonance (c'est-à-dire les cartes de gauche) : pour les orbites progrades, la carte est composée d'orbites très régulières pour des petites valeurs de  $E$  (carte (e)). Lorsque  $E$  augmente (carte (c)), quelques zones chaotiques et d'échappées apparaissent, menant à une carte principalement d'orbites échappées pour des valeurs plus grandes de  $E$  (carte (a)). Au dessus de  $E \sim -0.7$ , aucune orbite prograde n'est régulière. Les orbites rétrogrades ne sont pas autant influencées par la valeur de  $E$  que les orbites

progrades.

Si nous comparons à présent les cartes en dehors et dans la résonance, nous pouvons observer l'influence de la résonance sur certaines orbites, en particulier pour  $E = -0.75$ . Certaines orbites sont plus stables (avec une valeur du MEGNO de 0) dans la résonance mais il y a surtout plus d'orbites chaotiques et d'orbites s'échappant de la sphère de Hill. Pour  $E$  aux alentours de  $-0.75$ , les zones stables progrades sont complètement détruites. Ceci nous amène à penser qu'un proto-binaire a moins de chance d'être créé dans le cas résonant.

La même figure peut être réalisée dans le cas *Neptune-excentrique*. Le rayon  $R$  est alors égal à 36.0352 UA dans la résonance et à 40 UA dans la ceinture classique. Les résultats sont présentés à la figure 6.5. Les cartes ne présentent pas beaucoup de différences selon la position du centre de masse par rapport à la résonance. Ceci n'est donc pas suffisant pour expliquer l'absence de binaires.

Nous allons à présent calculer les temps de résidence pour voir si ces résultats confirment ce que nous déduisons des cartes de MEGNO.

#### 6.4.4 Temps de résidence avec le problème des 2+2 corps plan et circulaire

Dans les simulations de Monte Carlo,  $E$  est choisi aléatoirement dans l'intervalle  $[-3, -0.4]$  et  $x_1(0)$  et  $y_1(0)$  aléatoirement dans l'intervalle  $[-0.5, 0.5]$ . Les bornes de  $E$  ont été choisies de telle sorte qu'il y ait assez de conditions initiales réelles (donc  $E$  ne doit pas être trop grand) et que ces conditions initiales mènent à suffisamment d'orbites non chaotiques dans le cas non résonant (donc  $E$  ne doit pas être trop petit). Le temps prédéterminé est de 10 000 ans (dans le futur et dans le passé).

Des histogrammes des temps de résidence dans la résonance et dans la ceinture classique (pour 100 000 conditions initiales) sont présentés à la figure 6.6 pour le cas *Neptune-circulaire* et à la figure 6.7 pour le cas *Neptune-excentrique*. L'échelle pour les temps de résidence est logarithmique. Les astéroïdes se scindent en trois grandes catégories : les binaires qui quittent la sphère de Hill en moins de 2000 ans, les binaires restant couplés entre 2000 et 20 000 ans et les astéroïdes qui restent dans la sphère de Hill pendant au moins 20 000 ans (en rouge). Cette dernière catégorie correspond principalement à des binaires dans une zone stable qui n'ont pas été (et ne seront pas) détruits ; ils ne peuvent donc pas être des binaires récemment formés (c'est pour cette raison que ce bâton est représenté en rouge). La deuxième catégorie représente seulement un petit nombre d'orbites par rapport au nombre total de conditions initiales. Pratiquement toutes les orbites capturées sont dans la première catégorie, ce qui signifie que les astéroïdes restent couplés pendant moins de 2000 ans. La distribution du nombre d'orbites dans les trois catégories est donnée

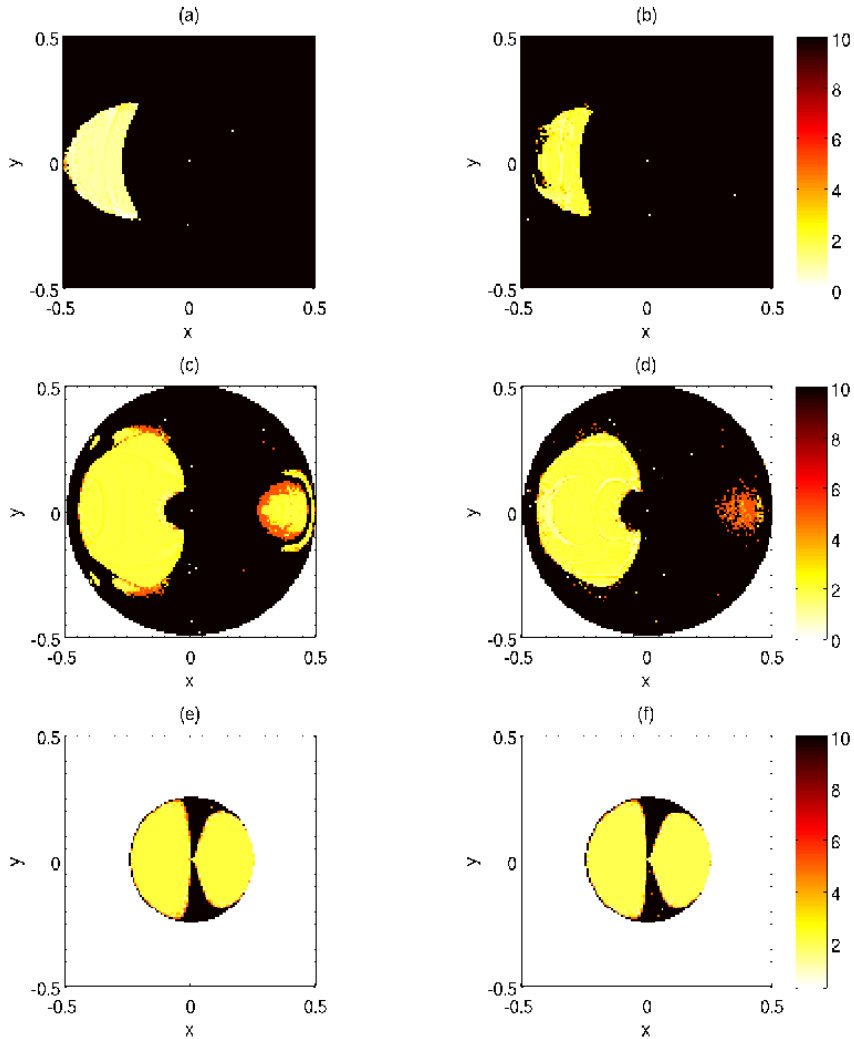


FIGURE 6.4 – Cartes de MEGNO du problème des 2+2 corps pour le cas *Neptune-circulaire*. Les cartes de gauche ont été réalisées avec le CM dans la ceinture classique ( $R = 45$  UA) et celles de droite avec le CM dans la résonance ( $R = 39.4343$  AU). Les valeurs de l'énergie initiale  $E$  sont, de haut en bas :  $-0.5$ ,  $-0.75$  et  $-1.5$ .



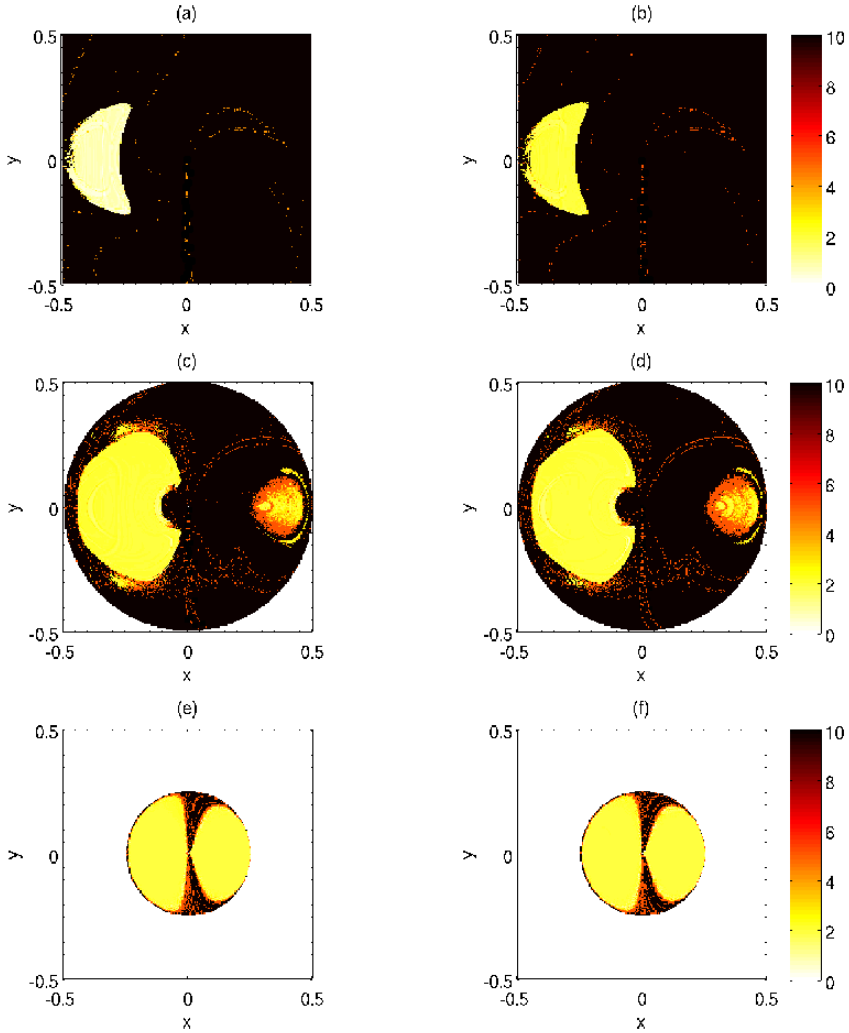


FIGURE 6.5 – Cartes de MEGNO du problème des 2+2 corps pour le cas *Neptune-excentrique*. Les cartes de gauche sont réalisées avec le CM dans la ceinture classique ( $R = 40$  UA) et celles de droites avec le CM dans la résonance ( $R = 36.0352$  UA). Les valeurs de l'énergie initiale  $E$  sont de haut en bas : -0.5, -0.75 et -1.5.

dans la Table 6.1. Ces résultats sont cohérents par rapport aux cartes de chaos. En effet, si nous simplifions, pour le cas *Neptune-circulaire*, quelques orbites stables (troisième catégorie) dans la ceinture classique deviennent chaotiques (deuxième catégorie) ou s'échappent (première catégorie) dans la résonance. Cependant, ces changements sont relativement faibles. Pour le cas *Neptune-excentrique*, il y a encore moins de différences. Ceci nous pousse à introduire une autre influence de la résonance dans le modèle : une excentricité initiale non nulle pour le CM.

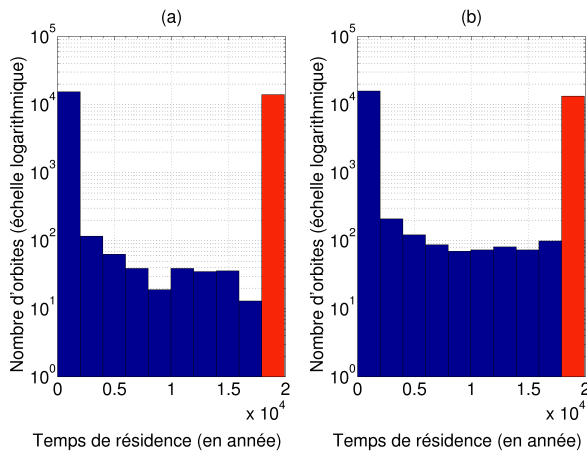


FIGURE 6.6 – Distribution des temps de résidence (en échelle logarithmique) de 100 000 astéroïdes dans la sphère de Hill du CM (avec une excentricité nulle) avec le problème des 2+2 corps plan pour le cas *Neptune-circulaire*. Dans (a), le CM est dans la ceinture classique ( $R = 45$  UA) et dans (b), le CM est dans la résonance ( $R = 39.4343$  UA). Ces configurations sont identiques à celles des cartes de MEGNO de la Fig. 6.4.

## 6.5 Le problème des 2+2 corps plan excentrique

Les résonances en moyen mouvement entre une planète et un astéroïde ont en général comme effet l'augmentation de l'excentricité de l'astéroïde. Ceci est confirmé pour la résonance 3 : 2 avec Neptune dans la population de la ceinture de Kuiper, comme la figure 6.8 le montre. En effet, cette figure présente les excentricités (par rapport aux demi-grands axes) des objets transneptuniens présents dans la base de données du Minor Planet Center. Nous pouvons clairement voir que, dans la résonance (à environ 39.4 UA), les excentricités sont principalement concentrées dans l'intervalle  $[0.1 ; 0.35]$ . Ce phénomène est aussi confirmé par Malhotra *et al.* (2000) et par Hahn et Malhotra (2005) par

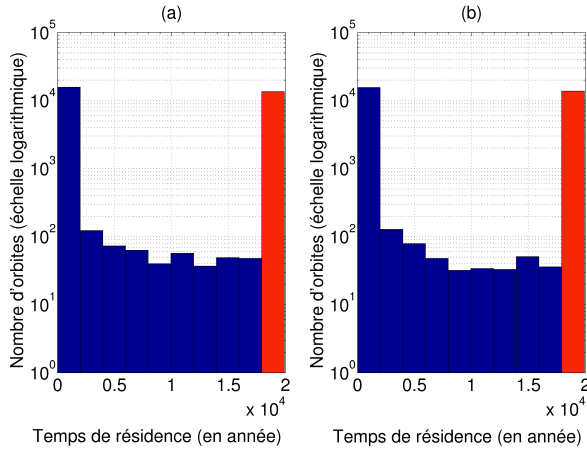


FIGURE 6.7 – Distribution des temps de résidence (en échelle logarithmique) de 100 000 astéroïdes dans la sphère de Hill du CM (avec une excentricité nulle) avec le problème des 2+2 corps plan pour le cas *Neptune-excentrique*. Dans (a), le CM est dans la ceinture classique ( $R = 40$  UA) et dans (b), le CM est dans la résonance ( $R = 36.0352$  UA). Ces configurations sont identiques à celles des cartes de MEGNO de la Fig. 6.5.

TABLE 6.1 – Pourcentage de binaires dans chaque catégorie des temps de résidence pour tous les cas étudiés avec le problème des 2+2 corps. La première catégorie correspond aux binaires qui quittent la sphère de Hill en moins de 2000 ans, la deuxième aux binaires qui restent couplés entre 2000 et 20 000 ans et la dernière aux astéroïdes qui restent dans la sphère de Hill pendant au moins 20 000 ans. Les numéros des figures liées à ces données sont notés à droite.

	Cat. 1	Cat. 2	Cat. 3	Fig.
<i>Cas Neptune-circulaire</i> plan				
Non résonant et $e_{CM} = 0$	51.8	1.2	47.0	6.6 ; 6.12
Résonant et $e_{CM} = 0$	52.8	2.9	44.3	6.6
Résonant et $e_{CM} = 0.3$	69.7	7.3	23.0	6.12
<i>Cas Neptune-excentrique</i> plan				
Non résonant et $e_{CM} = 0$	52.8	1.7	45.5	6.7 ; 6.13
Résonant et $e_{CM} = 0$	52.4	1.5	46.1	6.7
Résonant et $e_{CM} = 0.3$	70.3	5.6	24.1	6.12
<i>Cas Neptune-circulaire</i> non-plan				
Non résonant et $e_{CM} = 0$	81.3	5.3	13.4	6.15
Résonant et $e_{CM} = 0.3$	89.8	4.7	5.5	6.15

exemple. Ces articles montrent clairement des excentricités plus larges pour les objets en résonance en moyen mouvement avec Neptune et spécialement des excentricités jusqu'à 0.35 pour la résonance 3 : 2.

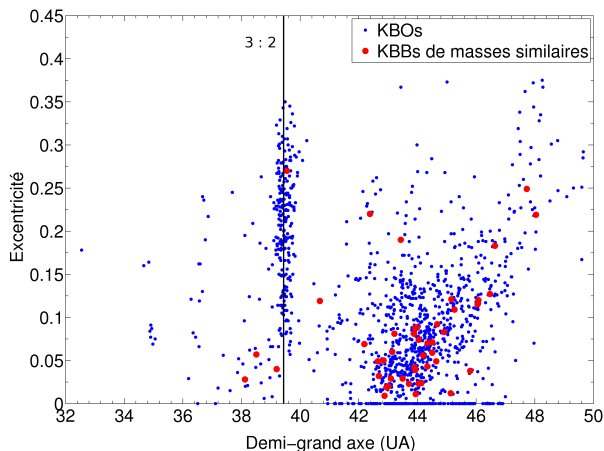


FIGURE 6.8 – Distribution des excentricités par rapport aux demi-grands axes des objets transneptuniens actuellement connus. La localisation de la résonance 3 : 2 et la position des binaires transneptuniens connus (dont les composantes sont de tailles équivalentes) sont également présentées. Ces données proviennent du Minor Planet Center et de la base de données [http ://www.johnstonsarchive.net/astro/astmoontable.html](http://www.johnstonsarchive.net/astro/astmoontable.html).

### 6.5.1 Cartes de MEGNO dans le cas plan excentrique

En supposant des excentricités comparables à celles observées pour les Plutinos, nous intégrons les équations du mouvement et nous réalisons des cartes de MEGNO. Comme nous nous intéressons à la dernière étape de la migration de Neptune, nous supposons que l'augmentation de l'excentricité des objets capturés en résonance est à peu près terminée. Des cartes de MEGNO pour deux valeurs différentes de  $E$  et pour des excentricités initiales du CM de 0, 0.1 et 0.3 sont comparées sur les figures 6.9 et 6.10, respectivement pour le cas *Neptune-circulaire* et *Neptune-excentrique*.

Avec une excentricité initiale de 0.3, presque toutes les orbites s'échappent ou sont chaotiques, surtout dans le cas *Neptune-circulaire*. Les zones de stabilité sont totalement détruites autant pour les orbites progrades que pour les rétrogrades, ce qui suggère que peu d'astéroïdes binaires peuvent se créer dans la résonance 3 : 2 si l'excentricité du centre de masse est grande.

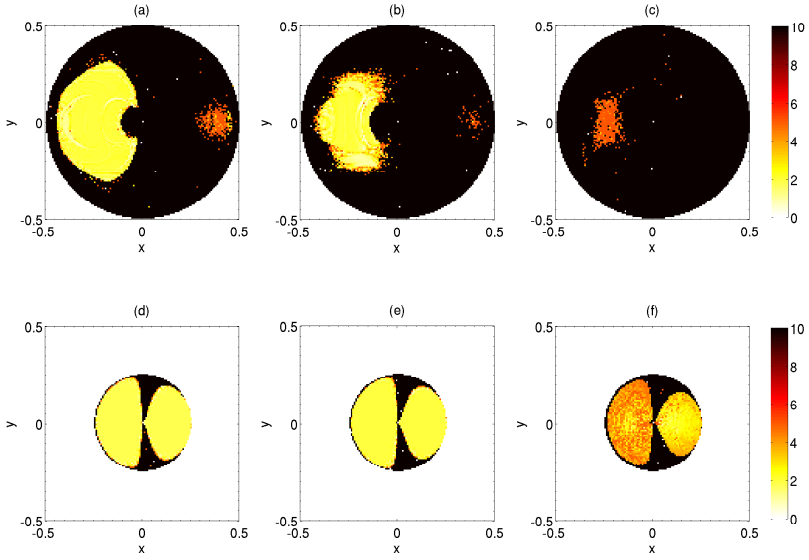


FIGURE 6.9 – Cartes de MEGNO du problème des 2+2 corps avec le CM dans la résonance ( $R = 39.4343$  UA) pour le cas *Neptune-circulaire*. La valeur de l'énergie initiale  $E$  est -0.75 pour les cartes du haut et -1.5 pour les cartes du bas. L'excentricité initiale du CM est, de gauche à droite : 0, 0.1 et 0.3.

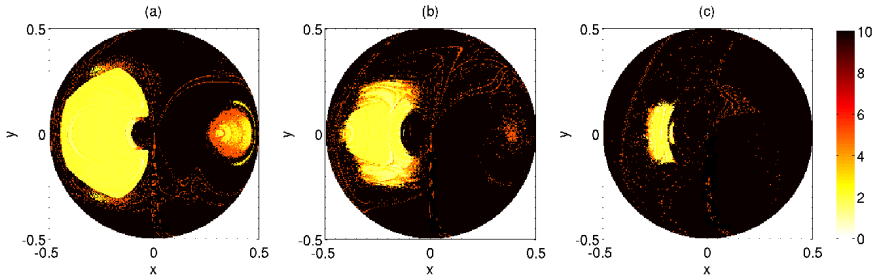


FIGURE 6.10 – Cartes de MEGNO du problème des 2+2 corps avec le CM dans la résonance ( $R = 36.0352$  UA) pour le cas *Neptune-excentrique*. La valeur de l'énergie initiale  $E$  est -0.75. L'excentricité initiale du CM est, de gauche à droite : 0, 0.1 et 0.3.

Remarquons que pour les orbites stables, l'excentricité du CM reste proche de sa valeur initiale pendant toute l'intégration. Par exemple, la variation d'une excentricité initiale de 0.1 est d'à peu près 0.012 avec une période de 9000 ans.

Le comportement chaotique ou d'échappée des orbites provient principalement de l'excentricité du CM et pas de l'influence directe de la résonance. Ceci est montré à la figure 6.11 qui présente les mêmes cartes de MEGNO qu'à la figure 6.9 mais avec le CM en dehors de la résonance. Peu de binaires peuvent donc être créés avec une grande excentricité. Évidemment, des astéroïdes excentriques sont aussi présents dans d'autres régions de la ceinture de Kuiper mais en plus petit nombre (voir figure 6.8). La ceinture classique est principalement composée d'astéroïdes sur une orbite quasi-circulaire. D'ailleurs, la figure 6.8 montre que la ceinture de Kuiper contient seulement un petit nombre de binaires de tailles proches avec une grande excentricité (proportionnellement au nombre de binaires détectés). Ces résultats suggèrent que la proportion d'astéroïdes binaires créés dans la résonance 3 : 2 sera plus petite que dans la ceinture classique.

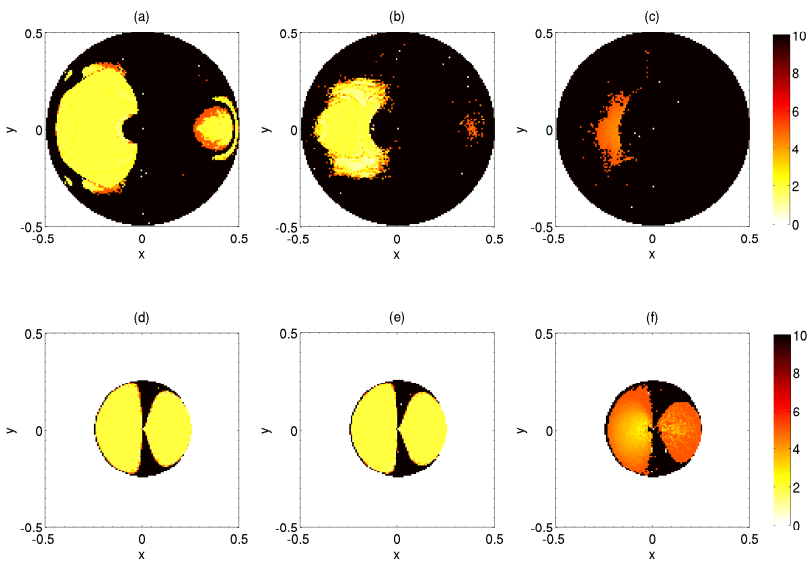


FIGURE 6.11 – Même figure que la figure 6.9 mais avec le CM dans la ceinture classique ( $R = 45$  UA).

### 6.5.2 Temps de résidence dans le cas plan excentrique

Nous réalisons à présent des histogrammes des temps de résidence d'astéroïdes binaires avec un CM initialement excentrique. Pour le cas *Neptune-circulaire*, les résultats sont présentés à la figure 6.12 pour le cas non résonant et non excentrique à gauche et pour le cas résonant avec une excentricité initiale de CM de 0.3 à droite. Des graphiques similaires sont présentés à la figure 6.13 pour le cas *Neptune-excentrique*. La distribution des nombres d'orbites dans les trois catégories est aussi donnée dans la table 6.1.

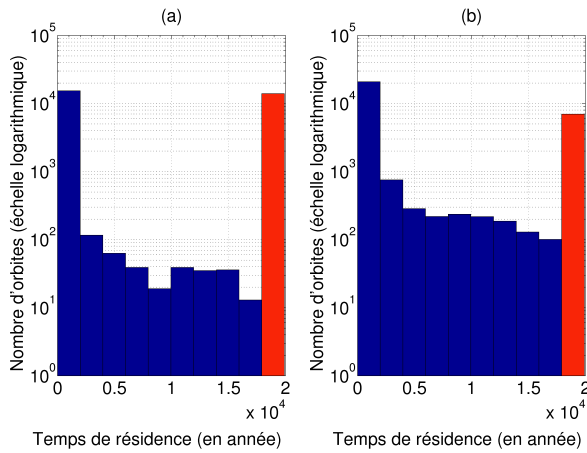


FIGURE 6.12 – Distribution des temps de résidence (en échelle logarithmique) de 100 000 astéroïdes dans la sphère de Hill du CM avec le problème des 2+2 corps plan pour le cas *Neptune-circulaire*. Dans (a), le CM est dans la ceinture classique ( $R = 45$  UA) avec une excentricité nulle et dans (b), le CM est dans la résonance ( $R = 39.4343$  UA) et l'excentricité initiale du CM est 0.3. Ces configurations sont identiques à celles des cartes de MEGNO de la Fig. 6.9.

Les astéroïdes formant un proto-binaire pendant plus de 20 000 ans sont deux fois moins nombreux dans le cas résonant excentrique que dans le cas non résonant circulaire. Ceci renforce la conclusion tirée des cartes de MEGNO : pratiquement toutes les zones stables dans le cas non résonant circulaire deviennent des zones d'échappées ou des zones chaotiques dans le cas résonant excentrique. Cela signifie que le nombre d'astéroïdes binaires dans la première et dans la deuxième catégorie augmente dans le cas résonant excentrique. Cependant, le nombre de binaires dans la deuxième catégorie reste une petite portion du nombre total de particules tests. Ces résultats supportent donc l'idée qu'il y a vraiment moins de zones stables pour les astéroïdes binaires dans la résonance 3 : 2 que dans la ceinture classique.

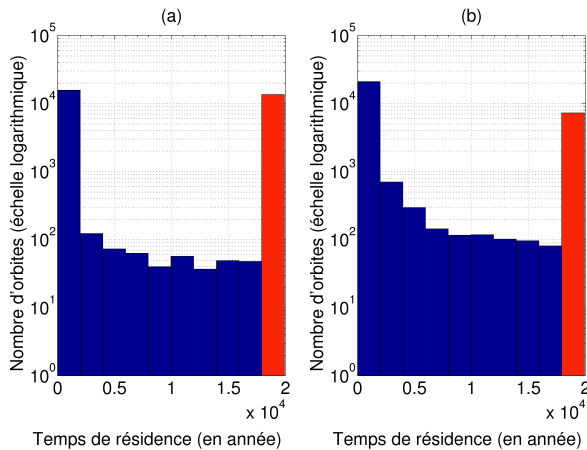


FIGURE 6.13 – Distribution des temps de résidence (en échelle logarithmique) de 100 000 astéroïdes dans la sphère de Hill du CM avec le problème des 2+2 corps plan pour le cas *Neptune-excentrique*. Dans (a), le CM est dans la ceinture classique ( $R = 40$  UA) avec une excentricité nulle et dans (b), le CM est dans la résonance ( $R = 36.0352$  UA) et l'excentricité initiale du CM est 0.3. Ces configurations sont identiques à celles des cartes de MEGNO de la Fig. 6.10.

## 6.6 Le problème des 2+2 corps non-plan excentrique

Nous allons aussi analyser ce que deviennent nos résultats dans le cas tridimensionnel. La figure 6.14 montre les inclinaisons (en fonction des demi-grands axes) des objets transneptuniens présents dans la base de données du Minor Planet Center. Les objets de la résonance 3 : 2 avec Neptune (à environ 39.4 UA) couvrent un grand intervalle d'inclinaisons. Afin d'analyser l'effet de l'inclinaison sur nos résultats, nous allons inclure la troisième dimension et choisir une inclinaison initiale aléatoire pour le CM héliocentrique (entre  $0^\circ$  et  $60^\circ$ ) ainsi que pour l'orbite mutuelle (aussi entre  $0^\circ$  et  $60^\circ$ ). Les résultats sont présentés à la figure 6.15 et dans la table 6.1 pour le cas *Neptune-circulaire* pour le cas non résonant, non excentrique et pour le cas résonant excentrique. Les résultats pour le cas *Neptune-excentrique* sont similaires.

Avec l'inclinaison, le nombre de binaires couplés pendant au moins 20 000 ans diminue dans les deux cas. Cependant, le rapport entre le nombre de binaires couplés pendant au moins 20 000 ans dans le cas résonant et dans le cas non résonant est à peu près le même que dans le cas plan. Nous pouvons donc en déduire que les conclusions tirées du cas plan sont encore valides dans le cas non-plan.



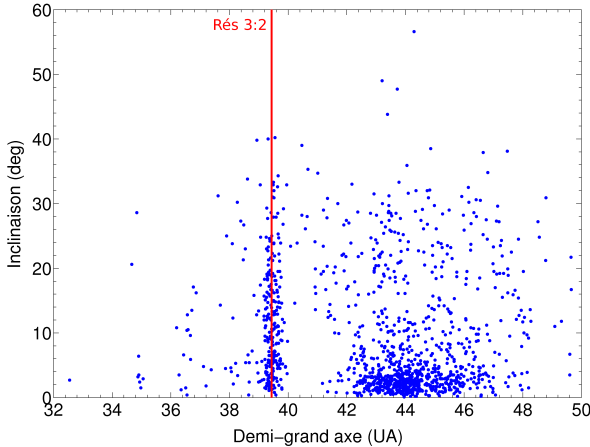


FIGURE 6.14 – Distribution des inclinaisons par rapport aux demi-grands axes des objets transneptuniens actuellement connus. La localisation de la résonance 3 : 2 est également présentée. Ces données proviennent du Minor Planet Center.

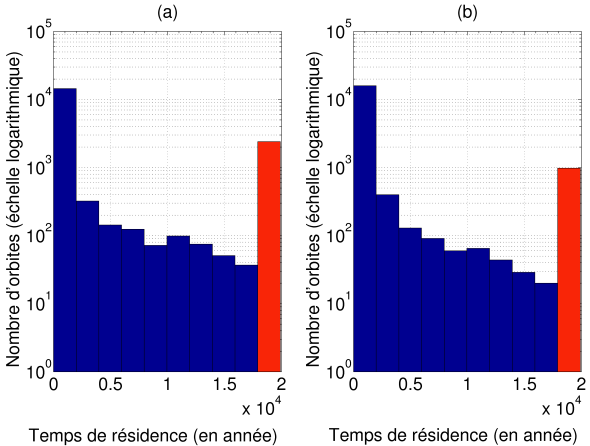


FIGURE 6.15 – Même figure que la Fig. 6.12 mais dans le cas non-plan.

## 6.7 Conclusion

Le but de ce chapitre était de fournir des pistes pour expliquer le très petit nombre d'astéroïdes binaires parmi les Plutinos. Nous avons supposé que la formation des binaires a eu lieu in situ (au sein de l'actuelle ceinture de Kuiper) lorsque l'excentricité de Neptune était en phase d'amortissement (selon le modèle de Nice). Les résultats avec le problème de Hill perturbé ne sont pas concluants. En utilisant l'approximation des 2+2 corps de Whipple et Szebehely (1984); Whipple et White (1985), nous avons pris en compte le fait que la résonance 3 : 2 augmente l'excentricité du centre de masse des astéroïdes. Nous avons effectué des intégrations numériques du mouvement de particules tests à l'intérieur de leur sphère de Hill commune afin de déterminer si elles forment ou non un binaire. Nous avons tracé des cartes de MEGNO et des histogrammes des temps de résidence de particules tests dans la résonance et en dehors de celle-ci pour deux périodes de formation différentes (appelées ici les cas *Neptune-circulaire* et *Neptune-excentrique*).

Les cartes de MEGNO ont montré que, pour les deux époques, les zones stables présentes dans le cas non résonant étaient presque entièrement détruites dans le cas résonant excentrique. Ceci signifie que deux astéroïdes ne peuvent pas facilement former un binaire stable sur une longue durée. De plus, les histogrammes des temps de résidence ont montré que beaucoup moins de binaires restent couplés pendant plus de 20 000 ans dans la région des Plutinos.

Puisque les résultats sont similaires pour les deux époques considérées, nous concluons que nos résultats sont valides depuis la dernière rencontre proche de Neptune avec Uranus (quelques centaines de millions d'années après la dissipation du disque de gaz) jusqu'à nos jours.

Nos résultats indiquent qu'une paire d'astéroïdes dans la résonance a moins de chance de former un binaire qu'un couple à l'extérieur de la résonance. De surcroît, plus l'excentricité de leur CM est grande, plus petite est la probabilité de formation d'un binaire. Ceci signifie que des objets formés ou capturés depuis longtemps dans des résonances ne vont plus produire beaucoup de binaires. Les quelques binaires observés dans la résonance 3 : 2 sont donc probablement de vieux binaires robustes qui ont évité les rencontres proches avec Neptune et qui terminent capturés dans la résonance, après que l'excentricité de Neptune ait diminué.



# Chapitre 7

## Le potentiel d'interaction dans le formalisme des tenseurs STF : application aux astéroïdes doubles

### 7.1 Introduction

Ce chapitre présente une application du potentiel mutuel développé à l'aide des tenseurs STF à un astéroïde double : le système (66391) 1999  $KW_4$ . La binarité de cet astéroïde a été découverte en 2001 par des observations radar (Benner *et al.*, 2001), même si ce système avait déjà été observé photométriquement plus tôt (Pravec et Sarounova, 2001). 1999  $KW_4$  est un astéroïde géocroiseur et aussi un objet potentiellement dangereux (PHO). Une estimation de la forme des deux astéroïdes composant ce binaire, appelés ici Alpha et Bêta (Alpha étant le plus massif des deux), de leur rotation et des éléments orbitaux de leur orbite mutuelle a été réalisée par Ostro *et al.* (2006) et Scheeres *et al.* (2006). La dynamique du système a aussi été étudiée en détail par Fahnestock et Scheeres (2008) grâce à l'approche polyédrale du problème des deux corps.

Notre modèle s'applique particulièrement bien à ce système puisque les deux corps ont des formes très irrégulières et qu'il y a un échange important entre l'énergie rotationnelle et l'énergie translationnelle (voir Fahnestock et Scheeres (2008)). Nous allons étudier ce système avec le formalisme des tenseurs STF et comparer nos résultats avec ceux de Fahnestock et Scheeres (2008).

Le but principal de ce chapitre est la validation de notre méthode et pas l'étude précise du système (66391) 1999  $KW_4$ .

## 7.2 Modèle et conditions initiales

Afin de comparer nos résultats avec ceux de Fahnestock et Scheeres (2008), nous prenons les mêmes hypothèses : nous ne considérons aucune force extérieure au système. Nous ne prenons donc en compte ni la rotation du système autour du Soleil, ni la perturbation des planètes proches.

Pour rappel, le potentiel d'interaction gravitationnelle mutuelle de deux corps  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  est défini par (1.27) :

$$V_{1-2} = GM_1M_2 \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} \sum_{l_2=0}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{l_2} R_1^{l_1} R_2^{l_2} \left( \mathcal{M}_{l_1,m_1}^{\mathcal{R}_{t,1}} \mathcal{M}_{l_2,m_2}^{\mathcal{R}_{t,2}} (-1)^{l_1} \gamma_{l_2,m_2}^{l_1,m_1} \frac{Y_{l_1+l_2,m_1+m_2}(\theta_{12}, \phi_{12})}{r_{12}^{l_1+l_2+1}} \right),$$

où :

- $\vec{z}_2 - \vec{z}_1$  est le vecteur reliant le corps  $\mathcal{B}_1$  au corps  $\mathcal{B}_2$  dont les coordonnées sphériques sont notées  $(r_{12}, \theta_{12}, \phi_{12})$ ,
- $\gamma_{l_2,m_2}^{l_1,m_1}$  est un coefficient ne dépendant que de  $l_1, m_1, l_2$  et  $m_2$  donné par :

$$\gamma_{j,k}^{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{(l+m)!(l-m)!} \frac{2j+1}{(j+k)!(j-k)!} \frac{(l+j-m-k)!(l+j+m+k)!}{4\pi(2l+2j+1)}}$$

Les coefficients  $\mathcal{M}_{l,m}^{\mathcal{R}_t}$  sont calculés pour les deux corps en utilisant les équations (1.21), (1.22), (1.23) et (1.29) du chapitre 1 basées sur les coefficients du développement en harmoniques sphériques. Ceux-ci sont calculés comme expliqué dans la section 2.4 en utilisant le logiciel SHTOOLS. Les modèles de forme utilisés pour les deux astéroïdes du système (66391) 1999 *KW*<sub>4</sub> proviennent du Jet Propulsion Laboratory de la NASA<sup>1</sup>. Nous calculons les coefficients des harmoniques sphériques de la forme des deux corps jusqu'au degré et à l'ordre 20. Cependant, nous n'utilisons dans les intégrations numériques que les coefficients jusqu'au degré et ordre 4. En effet, un développement en harmoniques sphériques de degré et ordre 6 ne modifie pas les périodes et l'allure générale des graphiques de la figure 7.1 et un développement d'ordre supérieur serait trop coûteux en temps de calcul. Les coefficients jusqu'au degré et ordre 4 sont présentés dans la table 7.1.

Nous définissons un repère droitier inertiel, noté  $\mathcal{F}$ , centré sur le centre de masse de Alpha et dont l'axe X est dans la direction initiale de Bêta, l'axe Z est perpendiculaire au plan orbital initial de Bêta autour de Alpha et l'axe Y est orthogonal aux deux autres. Les propriétés principales du modèle nominal

---

1. Ces modèles de forme sont disponibles aux adresses <http://echo.jpl.nasa.gov/asteroids/shapes/kw4a.obj> et <http://echo.jpl.nasa.gov/asteroids/shapes/kw4b.obj>

TABLE 7.1 – Coefficients principaux des harmoniques sphériques des deux composantes de (66391) 1999 KW<sub>4</sub>.

Pour Alpha :

Degré (n)	Ordre (m)	$C_{n,m}$	$S_{n,m}$
2	0	$-0.6690 \times 10^{-1}$	0
2	1	$0.3035 \times 10^{-4}$	$-0.2391 \times 10^{-4}$
2	2	$0.4850 \times 10^{-2}$	$0.2118 \times 10^{-6}$
3	0	$-0.8729 \times 10^{-2}$	0
3	1	$-0.4553 \times 10^{-2}$	$-0.6835 \times 10^{-2}$
3	2	$0.7255 \times 10^{-3}$	$-0.2109 \times 10^{-3}$
3	3	$0.4230 \times 10^{-3}$	$0.2273 \times 10^{-3}$
4	0	$0.4680 \times 10^{-1}$	0
4	1	$-0.3140 \times 10^{-4}$	$0.2607 \times 10^{-2}$
4	2	$-0.1441 \times 10^{-3}$	$0.2361 \times 10^{-3}$
4	3	$-0.1331 \times 10^{-4}$	$0.1547 \times 10^{-4}$
4	4	$0.1422 \times 10^{-4}$	$-0.1532 \times 10^{-4}$

Pour Bêta :

Degré (n)	Ordre (m)	$C_{n,m}$	$S_{n,m}$
2	0	-0.2275	0
2	1	$0.8695 \times 10^{-4}$	$-0.3681 \times 10^{-3}$
2	2	$0.5391 \times 10^{-1}$	$-0.1941 \times 10^{-3}$
3	0	$-0.1079 \times 10^{-2}$	0
3	1	$-0.3595 \times 10^{-2}$	$0.3621 \times 10^{-2}$
3	2	$-0.9628 \times 10^{-3}$	$-0.3598 \times 10^{-3}$
3	3	$-0.1864 \times 10^{-2}$	$0.9309 \times 10^{-4}$
4	0	$0.9372 \times 10^{-1}$	0
4	1	$-0.1851 \times 10^{-2}$	$-0.3506 \times 10^{-3}$
4	2	$-0.5599 \times 10^{-2}$	$0.8713 \times 10^{-4}$
4	3	$-0.2013 \times 10^{-3}$	$-0.1760 \times 10^{-3}$
4	4	$0.6153 \times 10^{-4}$	$-0.5308 \times 10^{-4}$

TABLE 7.2 – Propriétés principales du modèle nominal pour  $KW_4$  (tirées de Ostro *et al.* (2006) pour le rayon moyen et de Fahnstock et Scheeres (2008) pour les autres données).

Paramètre (unité)	Alpha	Bêta
Masse ( $10^{12}$ kg)	2.353	0.135
Rayon moyen (km)	0.6585	0.2255
Premier moment d'inertie (normalisé par la masse) $I_x$ ( $km^2$ )	0.1648	0.01608
Deuxième moment d'inertie (normalisé par la masse) $I_y$ ( $km^2$ )	0.1726	0.02374
Troisième moment d'inertie (normalisé par la masse) $I_z$ ( $km^2$ )	0.1959	0.02799

TABLE 7.3 – Angles d'Euler 3-1-3 des deux composantes de (66391) 1999  $KW_4$  (calculés à partir des angles d'Euler 3-2-3 de Fahnstock et Scheeres (2008)).

	Pour Alpha			Pour Bêta		
	$\psi(^{\circ})$	$\theta(^{\circ})$	$\phi(^{\circ})$	$\psi(^{\circ})$	$\theta(^{\circ})$	$\phi(^{\circ})$
Relaxé	117.04	0.0	-173.93	90.0	0.0	90.0
Excité	117.04	10.0	-173.93	90.0	0.0	90.0

de  $KW_4$  sont présentées dans la table 7.2. Nous choisissons deux jeux de conditions initiales, utilisées dans Fahnstock et Scheeres (2008), ayant des niveaux d'excitation d'énergie différents : une configuration relaxée et une configuration excitée. Ces conditions initiales sont deux exemples de configurations possibles du système en accord avec les données connues. Pour les deux configurations, le demi-grand axe initial de Bêta autour de Alpha vaut 2540.5 m et nous prenons  $i = \Omega = \omega = 0$  puisque l'orientation initiale du système complet n'a aucune influence sur la dynamique interne du système (car nous ne prenons en compte aucune influence extérieure). Dans le cas relaxé, l'excentricité  $e$  vaut 0.01125 et l'anomalie moyenne  $M$  est  $0^{\circ}$ . Dans le cas excité,  $e = 0.010$  et  $M = 180^{\circ}$ . Les angles d'Euler orientant chaque composante du binaire par rapport au repère inertiel, avec la convention d'angles d'Euler 3-1-3 ( $\psi, \theta, \phi$ ), sont donnés dans la table 7.3. Pour les deux conditions initiales, l'axe de rotation initial de chaque corps correspond à son axe de figure Z propre. La vitesse de rotation initiale de Alpha est de  $3125.4^{\circ}/\text{jour}$  et celle de Bêta est de  $495.0^{\circ}/\text{jour}$ , ce qui est aussi à peu près la vitesse orbitale de Bêta autour de Alpha. Cela signifie que Bêta est très proche de la résonance spin-orbite 1 : 1.

## 7.3 Résultats

Nous intégrons le problème des deux corps rigides développé dans le formalisme des tenseurs STF (voir section 1.4.2). Les simulations ont été réalisées avec NIMASTEP, présenté à la section 2.2, et avec un intégrateur Bulirsch-Stoer à pas variables<sup>2</sup>. Le temps d'intégration est de 200 heures.

Les résultats de ces simulations sont présentés aux figures 7.1 et 7.2. La figure 7.1 présente l'évolution des éléments orbitaux de l'orbite mutuelle dans le repère inertiel  $\mathcal{F}$  pour les cas relaxé et excité. Dans ces graphiques, nous retrouvons quelques périodes : les petites oscillations correspondent à la période de rotation de Alpha, qui est de  $\sim 2.76$  heures. La période la plus visible est la période orbitale de Bêta autour de Alpha (équivalente à la période de rotation de Bêta), qui est de  $\sim 17.45$  heures. Enfin, les grandes oscillations (seulement visibles sur le demi-grand axe dans les deux cas et sur l'excentricité dans le cas excité) sont dues à une excitation de la précession de Bêta (causée par les oscillations rapides précédentes) avec une période de  $\sim 188$  heures (voir Fahnestock et Scheeres (2008)).

La figure 7.2 présente l'évolution de l'énergie totale et des énergies cinétique et potentielle totales du système dans le cas excité. Comme nous pouvons le voir, l'énergie totale est à peu près constante (avec des variations maximales de l'ordre de  $10^6 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ ) et il y a un échange réel entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Ces variations sont plus faibles dans le cas relaxé.

## 7.4 Comparaison avec l'article de Fahnestock et Scheeres (2008)

Afin de valider nos résultats, nous les comparons à ceux de Fahnestock et Scheeres (2008) qui ont intégré le problème des deux corps rigides en utilisant le potentiel polyédral pour approximer l'effet de la non-sphéricité des deux corps. Les éléments orbitaux de l'orbite mutuelle calculés par Fahnestock et Scheeres (2008) sont présentés à la figure 4 de leur article. Cependant, sur cette figure, l'évolution des éléments orbitaux n'est pas donnée dans le même repère que le nôtre. Le repère qu'ils utilisent est lié au vecteur de moment angulaire total au temps initial. Ce vecteur s'écrit dans notre repère initial  $\mathcal{F}$  (avec l'indice 1 pour Alpha et 2 pour Bêta) :

$$\vec{K} = \vec{K}_0 + \vec{K}_1 + \vec{K}_2, \quad (7.1)$$

---

2. Cet intégrateur nous semble être le meilleur compromis entre précision et vitesse pour cette étude. Il permet d'obtenir des solutions d'équations différentielles ordinaires avec une haute précision et, en comparaison avec d'autres intégrateurs classiques, avec peu d'efforts de calcul. C'est précisément ce point qui nous a intéressé pour ce problème.



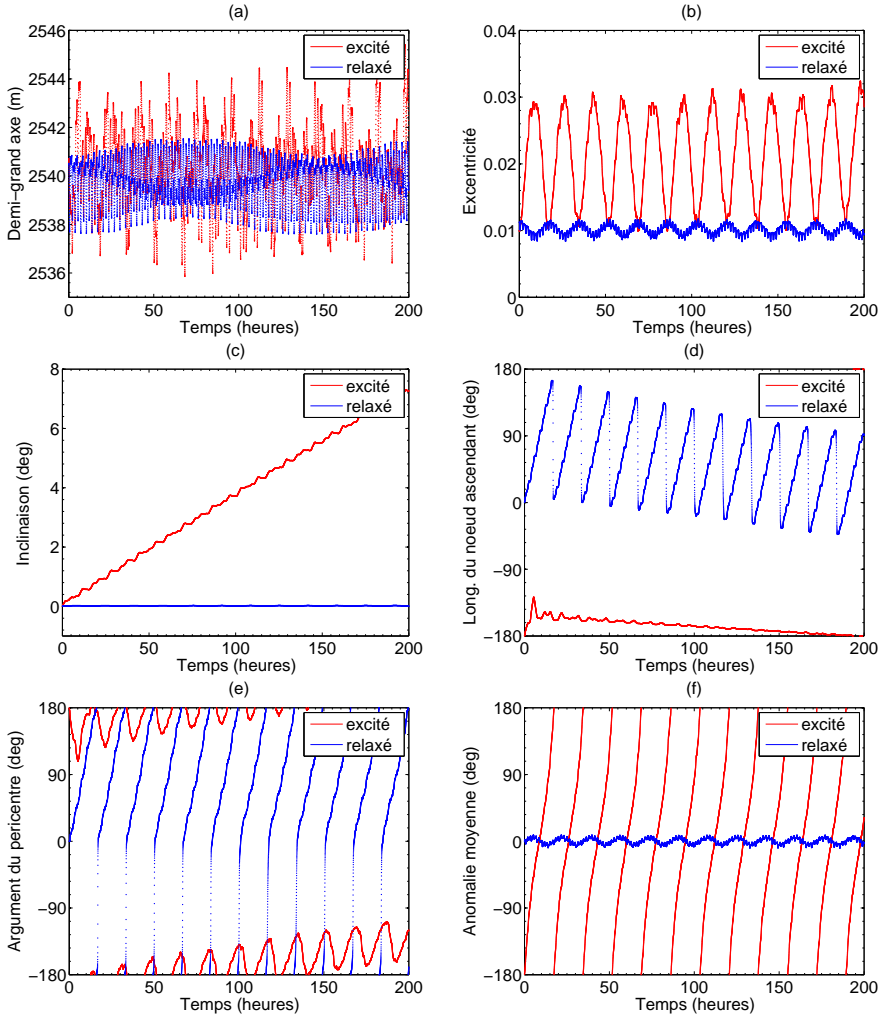


FIGURE 7.1 – Éléments orbitaux de l'orbite mutuelle (en considérant que Bêta est en rotation autour de Alpha) dans le repère inertiel  $\mathcal{F}$  pour les cas relaxé et excité.

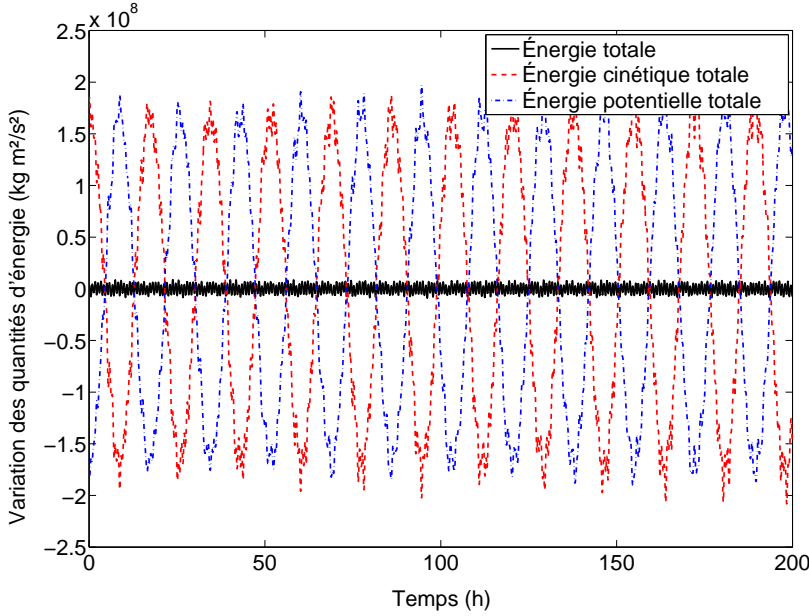


FIGURE 7.2 – Évolution de l'énergie totale et des énergies cinétique et potentielle totales du système dans le cas excité.

où :

- $\vec{K}_0 = A_1(\vec{R} \times m\dot{\vec{R}})$  est la composante de translation,
- $\vec{K}_1 = A_1 I_1 \vec{\Omega}_1$  est la composante de rotation de Alpha,
- $\vec{K}_2 = A_2 I_2 \vec{\Omega}_2$  est la composante de rotation de Bêta.

Pour la configuration relaxée, les trois parties du moment angulaire total,  $\vec{K}_0$ ,  $\vec{K}_1$  et  $\vec{K}_2$ , sont des vecteurs orthogonaux au plan orbital initial (car l'angle d'Euler  $\theta$  est nul pour Alpha et pour Bêta). Les deux repères sont donc les mêmes (l'axe Z du repère  $\mathcal{F}$  est dans la direction du moment angulaire total).

Ce n'est plus le cas avec la configuration excitée. Dans ce cas, on calcule  $\vec{K} = \vec{K} / \|\vec{K}\| = (0.1205, 0.0615, 0.9908)$  dans notre repère inertiel. Le pourcentage pour chaque composante est de 22% pour  $\vec{K}_0$ , 77% pour  $\vec{K}_1$  et 0.1% pour  $\vec{K}_2$ . L'ancien repère inertiel  $\mathcal{F}$  est transformé en ce nouveau repère lié au moment angulaire total, noté  $\mathcal{K}$ , par deux rotations : premièrement, une rotation d'angle  $\phi$  autour du troisième axe et ensuite une rotation d'angle  $\theta$  autour du premier axe. Les axes  $\{\vec{K}_x, \vec{K}_y, \vec{K}_z\}$  du repère  $\mathcal{K}$  sont alors écrits en fonction des axes

$\{\vec{F}_x, \vec{F}_y, \vec{F}_z\}$  du repère  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{pmatrix} \vec{K}_x \\ \vec{K}_y \\ \vec{K}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{F}_z \end{pmatrix}.$$

Puisque l'axe  $\vec{K}_z$  a la même direction que le vecteur de moment angulaire total  $\vec{K}$ , on résout les équations :

$$\begin{cases} \sin \phi \sin \theta = 0.1205, \\ \cos \phi \sin \theta = 0.0615, \\ \cos \theta = 0.9908 \end{cases}$$

afin de calculer les angles  $\phi$  et  $\theta$ , ce qui donne  $\phi = 62.95^\circ$  et  $\theta = 7.78^\circ$ . Ces angles correspondent bien aux valeurs initiales des éléments orbitaux  $\omega$  et  $i$  de la figure 4 de Fahnestock et Scheeres (2008) pour le cas excité (en utilisant le fait que  $M = 180^\circ$  et en conséquence,  $\omega$  est égal à  $180^\circ - \phi = 117.05^\circ$ ).

Nos éléments orbitaux peuvent à présent être écrits dans le repère  $\mathcal{K}$  tout au long de l'intégration. Le demi-grand axe, l'excentricité et l'anomalie moyenne ne sont pas affectés par ce changement de repère. La différence la plus notable pour ces éléments entre nos intégrations et celles de Fahnestock et Scheeres (2008) est le fait que la longue période de  $\sim 188$  heures est beaucoup plus marquée dans leurs intégrations. Mis à part cela, les résultats sont similaires. Pour les angles restants, nous retrouvons le même genre d'évolution que dans Fahnestock et Scheeres (2008). Les évolutions de l'inclinaison et de la longitude du nœud ascendant sont données à la figure 7.3 à titre d'exemple.

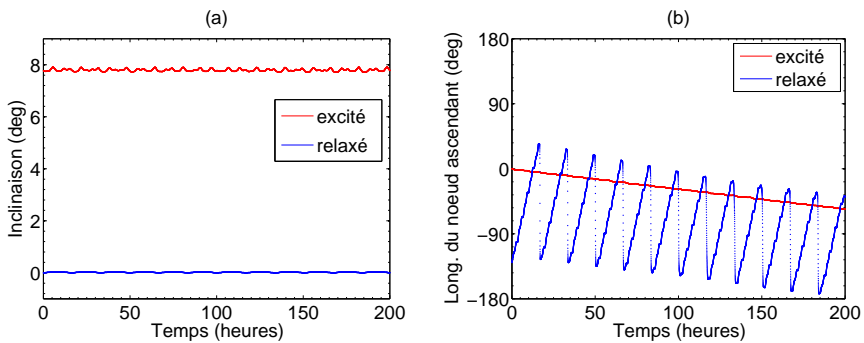


FIGURE 7.3 – Inclinaison et longitude du nœud ascendant pour l'orbite mutuelle (en considérant que Bêta est en rotation autour de Alpha) dans le repère inertiel  $\mathcal{K}$  pour les cas relaxé et excité.

En conclusion, les comparaisons sont tout-à-fait satisfaisantes. Les petites différences (en particulier la période de  $\sim 188$  h qui est moins importante

dans nos simulations) sont expliquées par le fait que les modèles utilisés sont radicalement différents. De plus, les simulations effectuées par Fahnestock et Scheeres (2008) utilisent un modèle de forme complet et pas seulement un développement en harmoniques sphériques de degré et ordre 4. Les résultats obtenus valident notre méthode.

## 7.5 Conclusion

Ce chapitre permet de tester l'intégration du problème des deux corps rigides développé dans le formalisme des tenseurs STF de la section 1.4. C'est la première fois que ce formalisme est utilisé, à notre connaissance, pour des astéroïdes binaires. Notre application à l'astéroïde binaire (66391) 1999 *KW*<sub>4</sub> et la comparaison de nos résultats avec ceux de Fahnestock et Scheeres (2008) nous montrent que ce formalisme est bien adapté à ce genre d'étude.

La prochaine étape de ce travail est l'application de ce formalisme à d'autres systèmes doubles dont la dynamique n'a pas encore été étudiée en détail. On pourrait ensuite ajouter aux équations du mouvement des effets dissipatifs, comme l'effet de marée et de BYORP, plus facilement avec ce formalisme (voir Mathis et Le Poncin-Lafitte (2009)).



# Conclusions et perspectives

Dans cette thèse, nous avons étudié la stabilité et l'évolution d'astéroïdes multiples. Ce sujet de recherche est très varié étant donné la diversité des systèmes multiples rencontrés dans le système solaire. On distingue deux grandes catégories : les satellites d'astéroïdes et les astéroïdes doubles. Cependant, chaque catégorie comporte encore des systèmes très différents les uns des autres étant donné la masse des corps, leur forme, leur éloignement, leur situation dans le système solaire,... Les perturbations à prendre en compte diffèrent fortement d'un cas à l'autre. Par exemple, l'étude de la dynamique d'un satellite d'astéroïde nécessite la prise en compte de la forme du primaire alors que ce n'est pas forcément le cas pour l'étude de la formation des binaires de la ceinture de Kuiper. De même, la rotation propre des corps doit être considérée dans les équations du mouvement lorsqu'on étudie la dynamique d'un astéroïde double, mais pas pour des satellites d'astéroïdes. On peut aussi étudier des choses très différentes à propos de ces systèmes comme la stabilité, la dynamique, la situation du système par rapport à des résonances, l'évolution dissipative, la formation,...

Les systèmes rencontrés sont souvent complexes et nécessitent donc des études très poussées et quasiment individualisées. Nous avons développé tout au long de cette thèse des outils génériques qui donnent de nouvelles perspectives d'analyse. Notre optique a été d'ouvrir plusieurs pistes et non de nous focaliser sur un système d'astéroïdes multiples précis. Nous espérons que ces différentes avancées seront maintenant exploitées plus en détail dans d'autres recherches et adaptées à chaque cas.

Nous avons effectué cinq études sur le sujet de la stabilité des astéroïdes multiples. La première (chapitre 3) est la détection des résonances gravitationnelles entre un ellipsoïde en rotation constante et une masse ponctuelle. Cette approche innovante (tant par l'utilisation du MEGNO comme indicateur de stabilité que par le choix des paramètres fixés) a permis d'identifier des courbes

de résonance exacte dans le plan des demi-axes de l'ellipsoïde. Elle donne aussi une expression approximée simple du déplacement (par rapport à la résonance exacte) dû à la forme de l'ellipsoïde.

La deuxième étude (chapitre 4) est la détermination des résonances principales entourant le système triple (87) Sylvia (et les autres systèmes triples connus par la suite). Nous avons conclu que tous les systèmes triples étudiés se trouvent dans une zone stable et, à l'exception de (216) Kleopatra, entre les résonances en moyen mouvement  $2 : 1$  et  $3 : 1$ . L'évolution de ces systèmes par les effets de marée et de BYORP a ensuite été analysée (chapitre 5). Une étude plus poussée de ces 5 systèmes triples serait probablement utile pour connaître leur évolution, tant les futurs possibles sont nombreux.

Dans la partie traitant des astéroïdes doubles, nous avons étudié une question précise à propos de la formation des binaires de la ceinture de Kuiper (chapitre 6) : pourquoi y a-t-il si peu d'astéroïdes binaires parmi les Plutinos ? Notre approche montre que l'excentricité du centre de masse d'un proto-binaire (plus élevée à cause de la résonance en moyen mouvement avec Neptune) pourrait expliquer ce phénomène. Une étude plus complète du mécanisme de formation de ces binaires pourrait confirmer cette conclusion. Enfin, la dernière étude effectuée (chapitre 7) est l'utilisation du potentiel d'interaction dans le formalisme des tenseurs STF pour étudier le système double (66391) 1999 KW<sub>4</sub>. Celle-ci nous a permis de valider notre méthode et de montrer qu'elle est bien adaptée à l'étude d'astéroïdes doubles.

Il y a de nombreuses perspectives à ce travail. Épinglons-en quelques-unes :

- Tous les systèmes triples étudiés (sauf Kléopatra) se situent entre les résonances en moyen mouvement  $3 : 1$  et  $2 : 1$ . Il serait alors intéressant de faire une étude particulière de cette zone afin de voir si elle a un statut particulier, en terme de stabilité dynamique. Nous pourrions, par exemple, analyser la stabilité d'objets initialement situés dans d'autres régions, pour déterminer si cette condition est importante ou s'il s'agit d'un hasard.
- Les phénomènes dissipatifs agissant sur les satellites d'astéroïdes ne sont pas encore assez connus. Une étude détaillée de l'évolution dissipative des satellites des principaux systèmes binaires pourrait apporter beaucoup d'informations sur l'évolution de ce genre de systèmes.
- Une étude plus complète de la formation des astéroïdes binaires dans la ceinture de Kuiper, avec l'hypothèse du modèle de Nice, permettrait de confirmer notre théorie selon laquelle le petit nombre de binaires parmi les Plutinos est dû à l'augmentation de l'excentricité du centre de masse du binaire provoqué par la résonance.

- Le potentiel d’interaction dans le formalisme des tenseurs STF est bien adapté à l’étude des astéroïdes doubles. Il pourrait être facilement complété afin de prendre en compte des effets dissipatifs.

Dans la compréhension des astéroïdes multiples, beaucoup de travail a déjà été réalisé mais beaucoup reste encore à faire. La découverte fréquente de nouveaux systèmes et la proportion que prennent ceux-ci parmi la population des astéroïdes élargissent encore largement le champ d’investigation.





# Annexe A

## Force et matrice jacobienne du potentiel intégral

Nous calculons, dans un premier temps, la force induite par le potentiel intégral (1.11) qui est donnée par les dérivées partielles de  $V$ . Notons que  $\lambda_1$  dépend de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . On considère :

$$V(x_1, x_2, x_3) = V^*(x_1, x_2, x_3, \lambda_1(x_1, x_2, x_3)) = -\frac{3}{2}GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} f(s, x_1, x_2, x_3) ds,$$

où

$$f(s, x_1, x_2, x_3) = \left(1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}\right) \frac{1}{\sqrt{s^2 - h^2} \sqrt{s^2 - k^2}},$$

alors,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_i} &= \frac{\partial V^*}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3, \lambda_1 = cste) + \frac{\partial V^*}{\partial \lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} \\ &= -\frac{3}{2}GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, x_1, x_2, x_3) ds + \frac{3}{2}GM f(\lambda_1, x_1, x_2, x_3) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Or  $f(\lambda_1, x_1, x_2, x_3) = 0$  car  $\lambda_1$  est racine de  $1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}$ . Donc, nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{3}{2}GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left(1 - \frac{x_1^2}{s^2} - \frac{x_2^2}{s^2 - h^2} - \frac{x_3^2}{s^2 - k^2}\right) \frac{1}{\sqrt{s^2 - h^2} \sqrt{s^2 - k^2}} \right] ds,$$

ce qui nous amène aux composantes de la force :

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -3x_1 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{s^2(s^2 - h^2)^{1/2}(s^2 - k^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_2} &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} = -3x_2 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{(s^2 - h^2)^{3/2}(s^2 - k^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_3} &= -\frac{\partial V}{\partial x_3} = -3x_3 GM \int_{\lambda_1}^{+\infty} \frac{ds}{(s^2 - h^2)^{1/2}(s^2 - k^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les intégrales à résoudre s'expriment en fonction des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèces. On ne peut donc pas leur trouver une solution analytique explicite. Nous les modifions alors afin de les calculer numériquement. Nous commençons par faire le changement de variables  $t = 1/s$  (et donc  $dt = -\frac{1}{s^2}ds$ ). Il s'agit d'un changement de variables effectué dans Garnier *et al.* (2001) mais pour une autre intégrale. Le changement de variables est toujours défini car  $s$  varie de  $\lambda_1$  à  $+\infty$ ,  $\lambda_1$  est toujours strictement positif car c'est la plus grande coordonnée ellipsoïdale. Si  $\lambda_1 = 0$ , cela signifie que le point est au centre de l'ellipsoïde, ce qui est impossible.

Les composantes de la force deviennent

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= -3x_1 GM \int_0^{1/\lambda_1} \frac{t^2 dt}{(1 - h^2 t^2)^{1/2}(1 - k^2 t^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_2} &= -3x_2 GM \int_0^{1/\lambda_1} \frac{t^2 dt}{(1 - h^2 t^2)^{3/2}(1 - k^2 t^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_3} &= -3x_3 GM \int_0^{1/\lambda_1} \frac{t^2 dt}{(1 - h^2 t^2)^{1/2}(1 - k^2 t^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Les fonctions à intégrer sont toutes strictement croissantes. Nous pouvons les approximer précisément grâce à la quadrature de Gauss-Legendre. Afin d'utiliser cette quadrature, nous devons ramener les bornes de nos intégrales à -1 et 1. Pour ce faire, nous utilisons le changement de variables  $x = 2\lambda_1 t - 1$ ,

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 F_{x_1} &= -\frac{3}{2} \frac{x_1 GM}{\lambda_1} \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{1/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_2} &= -6 x_2 GM \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{3/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{1/2}}, \\
 F_{x_3} &= -6 x_3 GM \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2 dx}{(4\lambda_1^2 - h^2(x+1)^2)^{1/2} (4\lambda_1^2 - k^2(x+1)^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Nous pouvons, à présent, écrire la matrice jacobienne du potentiel intégral (1.11) :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{F_{x_1}}{x_1} + f_1(\lambda_1, h, k, x_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & f_1(\lambda_1, h, k, x_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} & f_1(\lambda_1, h, k, x_1) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \\ f_2(\lambda_1, h, k, x_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & \frac{F_{x_2}}{x_2} + f_2(\lambda_1, h, k, x_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} & f_2(\lambda_1, h, k, x_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \\ f_3(\lambda_1, h, k, x_3) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} & f_3(\lambda_1, h, k, x_3) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_2} & \frac{F_{x_3}}{x_3} + f_3(\lambda_1, h, k, x_3) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_1(\lambda_1, h, k, x_1) &= \frac{3x_1\mu}{\lambda_1^2(\lambda_1^2 - h^2)^{1/2}(\lambda_1^2 - k^2)^{1/2}} \\
 f_2(\lambda_1, h, k, x_2) &= \frac{3x_2\mu}{(\lambda_1^2 - h^2)^{3/2}(\lambda_1^2 - k^2)^{1/2}} \\
 f_3(\lambda_1, h, k, x_3) &= \frac{3x_3\mu}{(\lambda_1^2 - h^2)^{1/2}(\lambda_1^2 - k^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Dans le cas général,  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) est calculé par :

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = \frac{1}{A} \left( \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) B_i + \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \frac{C_i}{D} + 3x_i \right),$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= 3\sqrt{18\sqrt{Q} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3a_1}, \\
 B_1 &= \frac{1}{\sqrt{Q}} x_1 (-h^2 - k^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2), \\
 B_2 &= \frac{1}{\sqrt{Q}} x_2 (2h^2 - k^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2), \\
 B_3 &= \frac{1}{\sqrt{Q}} x_3 (-h^2 + 2k^2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2),
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{1}{Q} \left( -x_1 a_2 + a_1 x_1 (h^2 + k^2) + 3x_1 h^2 k^2 + \frac{2}{3} a_1^2 x_1 \right) + \frac{R}{Q^2} (2a_1 x_1 + 3x_1 (h^2 + k^2)),$$

$$C_2 = \frac{1}{Q} \left( -x_2 a_2 + a_1 x_2 k^2 + \frac{2}{3} a_1^2 x_2 \right) + \frac{R}{Q^2} (2a_1 x_2 + 3x_2 k^2),$$

$$C_3 = \frac{1}{Q} \left( -x_3 a_2 + a_1 x_3 h^2 + \frac{2}{3} a_1^2 x_3 \right) + \frac{R}{Q^2} (2a_1 x_3 + 3x_3 h^2),$$

$$D = \sqrt{1 - \frac{R^2}{Q^3}}, \quad \theta = \arccos \left( \frac{R}{Q^{3/2}} \right),$$

$$R = \frac{1}{54} (9a_1 a_2 - 27a_3 - 2a_1^3), \quad Q = \frac{1}{9} (a_1^2 - 3a_2),$$

$$a_1 = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - h^2 - k^2, \quad a_2 = x_1^2 (h^2 + k^2) + x_2^2 k^2 + x_3^2 h^2 + h^2 k^2,$$

$$a_3 = -x_1^2 h^2 k^2.$$

Dans le cas particulier où  $A = 0$ ,  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Si  $Q = 0$ , alors  $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = \frac{2}{3} x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Enfin, si  $D = 0$  et  $\theta = 0$ ,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = \frac{B_i + 3x_i}{3\sqrt{(18\sqrt{Q} - 3a_1)}}$$

et si  $D = 0$  et  $\theta = \pi$ ,

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_i} = \frac{B_i + 6x_i}{6\sqrt{(9\sqrt{Q} - 3a_1)}}.$$

# Annexe B

## Tenseurs STF

### B.1 Rotation des coefficients $M_{l,m}$

Afin d'écrire les coefficients des harmoniques sphériques dans le repère lié au corps  $\mathcal{R}_t$ , on utilise les résultats de Wigner (1959), déjà appliqués à ce genre de problèmes par Borderies (1978). Avec  $\alpha$  et  $\beta$  (respectivement  $\alpha'$  et  $\beta'$ ), les longitude et latitude relatives au repère inertiel (respectivement au repère tournant), on a :

$$\mathcal{P}_{lm}(\sin \beta) e^{im\alpha} = \frac{1}{(l-m)!} \sum_{k=-l}^l (l-k)! E_{l,m}^k(\psi, \theta, \phi) \mathcal{P}_{lk}(\sin \beta') e^{ik\alpha'}, \quad (\text{B.1})$$

avec

$$E_{l,m}^k(\psi, \theta, \phi) = (-1)^{l-m} e^{i(k-m)\frac{\pi}{2}} e^{i(m\psi+k\phi)} H_{l,m}^k(\theta)$$

et

$$\begin{aligned} H_{l,m}^k(\theta) = & \sum_{j=\inf(0, -m-k)}^{\inf(l-m, l-k)} (-1)^j \binom{l-m}{j} \binom{l+m}{m+k+j} \times \\ & \times \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j+m+k} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(l-j)-m-k} \end{aligned}$$

où la notation  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Dans le formalisme des tenseurs STF, les coefficients des harmoniques se retrouvent dans les  $M_{l,m}$  qui se définissent dans le repère  $\mathcal{R}$  par (voir (1.20)) :

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = \frac{4\pi}{2l+1} \int_M r^l Y_{l,m}^{*,\mathcal{R}}(\alpha, \beta) dM,$$

où  $Y_{l,m}^{*,\mathcal{R}}(\alpha, \beta)$  est le complexe conjugué de  $Y_{l,m}^{\mathcal{R}}(\alpha, \beta)$  dont nous rappelons la définition (voir (1.24)) :

$$Y_{l,m}^{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) = \mathcal{N}_{l,m} \mathcal{P}_{lm}(\cos \beta) e^{im\alpha}. \quad (\text{B.2})$$

Nous considérons ici uniquement le cas  $m \geq 0$ . En effet, pour le cas  $m < 0$ , nous utiliserons (1.23). En utilisant (1.25), les  $M_{l,m}^{\mathcal{R}}$  s'écrivent

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = \frac{4\pi}{2l+1} \int_M r^l (-1)^m Y_{l,-m}^{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) dM \quad (\text{B.3})$$

En appliquant (B.1) à (B.2), on a

$$Y_{l,m}^{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{(l-m)!} \mathcal{N}_{l,m} \sum_{k=-l}^l (l-k)! E_{l,m}^k(\psi, \theta, \phi) \frac{1}{\mathcal{N}_{l,k}} Y_{l,k}^{\mathcal{R}_t}(\alpha', \beta'),$$

et donc,

$$Y_{l,-m}^{\mathcal{R}}(\alpha, \beta) = \frac{1}{(l+m)!} \mathcal{N}_{l,-m} \sum_{k=-l}^l (l-k)! E_{l,-m}^k(\psi, \theta, \phi) \frac{1}{\mathcal{N}_{l,k}} Y_{l,k}^{\mathcal{R}_t}(\alpha', \beta'). \quad (\text{B.4})$$

On insère ensuite (B.4) dans (B.3) :

$$\begin{aligned} M_{l,m}^{\mathcal{R}} &= \frac{4\pi}{2l+1} \int_M r^l (-1)^m \frac{1}{(l+m)!} \mathcal{N}_{l,-m} \sum_{k=-l}^l (l-k)! \times \\ &\quad \times E_{l,-m}^k(\psi, \theta, \phi) \frac{1}{\mathcal{N}_{l,k}} Y_{l,k}^{\mathcal{R}_t}(\alpha', \beta') dM, \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire (en changeant le signe de  $k$ ) :

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = \frac{(-1)^m}{(l+m)!} \mathcal{N}_{l,-m} \sum_{k=-l}^l (l+k)! E_{l,-m}^{-k}(\psi, \theta, \phi) \frac{(-1)^k}{\mathcal{N}_{l,-k}} M_{l,k}^{\mathcal{R}_t} \quad (\text{B.5})$$

## B.2 Dérivées partielles des angles d'Euler dans le potentiel mutuel STF

Nous devons calculer les dérivées partielles du type  $\frac{\partial V}{\partial *}$  :

$$\frac{\partial V}{\partial *} = \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial *} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial *} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial *} \quad \text{avec } * \in \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}. \quad (\text{B.6})$$

Les angles d'Euler ne sont présents (dans  $V$ ) que dans les termes  $M_{l,m}^{\mathcal{R}}$ . Si on analyse l'équation (1.29), ou de façon équivalente (B.5), nous devons dériver

$$E_{l,-m}^{-k}(\psi, \theta, \phi) = (-1)^{l+m} e^{-i(k-m)\frac{\pi}{2}} e^{-i(m\psi+k\phi)} H_{l,-m}^{-k}(\theta)$$

par rapport à  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$ , avec

$$H_{l,-m}^{-k}(\theta) = \sum_{j=\sup(0,m+k)}^{\inf(l+m,l+k)} (-1)^j \binom{l+m}{j} \binom{l-m}{-m-k+j} \times \\ \times \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j-m-k} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(l-j)+m+k}$$

Nous trouvons

$$\frac{\partial E_{l,-m}^{-k}}{\partial \psi} = -i m E_{l,-m}^{-k} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial E_{l,-m}^{-k}}{\partial \phi} = -i k E_{l,-m}^{-k} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial E_{l,-m}^{-k}}{\partial \theta} = (-1)^{l+m} e^{-i(k-m)\frac{\pi}{2}} e^{-i(m\psi+k\phi)} \frac{\partial H_{l,-m}^{-k}(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{B.9})$$

avec

$$\frac{\partial H_{l,-m}^{-k}(\theta)}{\partial \theta} = \sum_{j=\sup(0,m+k)}^{\inf(l+m,l+k)} (-1)^j \binom{l+m}{j} \binom{l-m}{-m-k+j} \times \\ \times \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2j-m-k-1} \left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{2(l-j)+m+k-1} \times \\ \times \left( l \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + \frac{-2j+m+k}{2} \right)$$

Il reste à calculer les dérivées  $\frac{\partial \psi}{\partial *}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial *}$  et  $\frac{\partial \phi}{\partial *}$  avec  $*$   $\in \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ . Le problème qui se pose alors est que les 9 composantes de  $A^T$  (les  $3 \times 3$  composantes de  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  et  $\vec{\gamma}$ ) dépendent des trois angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  et sont donc liées entre elles. Cela signifie que les angles  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\phi$  ne sont pas déterminés de façon unique en fonction des composantes de  $A^T$ . Pour contourner ce problème, nous allons choisir 3 éléments de la matrice  $A^T$  indépendants et nous allons écrire les angles d'Euler et les autres composantes de la matrice en fonction de ceux-ci. Nous avons ici choisi  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  et  $\gamma_1$ . Les angles d'Euler s'écrivent en fonction de ces composantes :

$$\psi = \text{atan2}(\alpha_3, -\beta_3) \quad (\text{B.10})$$

$$\theta = \arccos \left( \text{sign}(\gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\phi = \text{atan2} \left( \gamma_1, \text{sign}(\gamma_2) \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} \right) \quad (\text{B.12})$$



Les dérivées de ces angles par rapport aux composantes de base sont donc :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} = \frac{-\beta_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \beta_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_3} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\gamma_3 \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \beta_3} = \frac{\beta_3}{\gamma_3 \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2}} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \gamma_3} = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha_3} = \frac{-\alpha_3 \gamma_1}{\gamma_2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2)} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \beta_3} = \frac{-\beta_3 \gamma_1}{\gamma_2 (\alpha_3^2 + \beta_3^2)} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \gamma_3} = \frac{1}{\gamma_2} \quad (\text{B.15})$$

Les autres composantes s'expriment en fonction de  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  et  $\gamma_1$  :

$$\gamma_2 = \text{sign}(\gamma_2) \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2}$$

$$\gamma_3 = \text{sign}(\gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2}$$

$$\alpha_1 = \frac{-\beta_3 (\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2) - \text{sign}(\gamma_2 \gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} \alpha_3 \gamma_1}{\text{sign}(\gamma_2) \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} (\alpha_3^2 + \beta_3^2)}$$

$$\alpha_2 = \frac{\gamma_1 \beta_3 - \text{sign}(\gamma_2 \gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} \alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_3}{\text{sign}(\gamma_2) \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2}} - \frac{\text{sign}(\gamma_2 \gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \gamma_1^2}{\text{sign}(\gamma_2) \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} (\alpha_3^2 + \beta_3^2)}$$

$$\beta_2 = - \frac{\text{sign}(\gamma_2 \gamma_3) \sqrt{1 - \alpha_3^2 - \beta_3^2} \sqrt{\alpha_3^2 + \beta_3^2 - \gamma_1^2} \beta_3 + \alpha_3 \gamma_1}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

On peut alors calculer les dérivées des angles d'Euler par rapport aux coefficients  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  et  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) de la façon suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_3} \frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta_3} \frac{\partial \beta_3}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1}$$

avec  $\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} = \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_3} \right)^{-1}$  (et de même pour  $\beta_3$  et  $\gamma_1$ ).

### Cas particuliers

Si  $\theta = 0$  ou  $\pi$ , nous avons vu que (voir éq. (1.30)) :

$$M_{l,m}^{\mathcal{R}} = e^{-im(\psi+\phi)} M_{l,k}^{\mathcal{R}_t}.$$

Alors, les dérivées partielles sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{l,m}^{\mathcal{R}}}{\partial \alpha_1} &= \frac{ime^{-im\lambda}}{|\beta_1|} \overline{M}_{l,k}^{\mathcal{R}_t}, & \frac{\partial M_{l,m}^{\mathcal{R}}}{\partial \alpha_2} &= \frac{im\delta e^{-im\lambda}}{|\alpha_1|} \overline{M}_{l,k}^{\mathcal{R}_t}, \\ \frac{\partial M_{l,m}^{\mathcal{R}}}{\partial \beta_1} &= \frac{-ime^{-im\lambda}}{|\alpha_1|} \overline{M}_{l,k}^{\mathcal{R}_t}, & \frac{\partial M_{l,m}^{\mathcal{R}}}{\partial \beta_2} &= \frac{im\delta e^{-im\lambda}}{|\beta_1|} \overline{M}_{l,k}^{\mathcal{R}_t}. \end{aligned}$$

où  $\lambda = \psi + \phi$  et  $\delta = 1$  lorsque  $\theta = 0$  et  $\lambda = \psi - \phi$  et  $\delta = -1$  lorsque  $\theta = \pi$ .

# Fonctions perturbatrices moyennisées

Nous détaillons ici les fonctions perturbatrices moyennisées utilisées pour l'intégration numérique des longues périodes dans l'étude du système (87) Sylvia.

La perturbation mutuelle entre les satellites  $\langle R_{mut} \rangle$  est approximée par un développement de leurs fonctions perturbatrices à l'ordre 2 en excentricité et en inclinaison donné par exemple par Murray et Dermott 2000 :

$$\begin{aligned} \langle R_{mut} \rangle = & \frac{1}{8}(2\alpha_{12}D + \alpha_{12}^2D^2)b_{1/2}^{(0)}(e_1^2 + e_2^2) - \frac{1}{2}\alpha_{12}b_{3/2}^{(1)}(s_1^2 + s_2^2) \\ & + \frac{1}{4}(2 - 2\alpha_{12}D - \alpha_{12}^2D^2)b_{1/2}^{(1)}e_1e_2\cos(\varpi_1 - \varpi_2) \\ & + \alpha_{12}b_{3/2}^{(1)}s_1s_2\cos(\Omega_1 - \Omega_2), \end{aligned}$$

où les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement au satellite interne et externe,  $\alpha_{12} = a_1/a_2$  (avec  $a_1 < a_2$ ),  $D = d/d\alpha$  est un opérateur différentiel, les  $b_s^{(j)}(\alpha)$  sont les coefficients de Laplace et  $s_j = \sin(i_j/2)$  ( $j = 1, 2$ ).

La perturbation due à l'aplatissement de Sylvia  $\langle R_{obl} \rangle$  est représentée par un développement d'ordre 4 en excentricité et inclinaison de la fonction perturbatrice de l'aplatissement, contenant les termes en  $J_2$ ,  $J_2^2$  et  $J_4$  (Veras 2007) :

$$\begin{aligned} \langle R_{obl} \rangle = & \mu \sum_{i=1}^2 \left[ a^{-2i-1} (\gamma_i^{(0)} + \gamma_i^{(1)}e^2 + \gamma_i^{(2)}e^4 + \gamma_i^{(3)}\sin^2 i + \gamma_i^{(4)}\sin^4 i \right. \\ & \left. + \gamma_i^{(5)}e^2\sin^2 i + \gamma_i^{(6)}e^2\sin^2 i \cos(2\varpi - 2\Omega)) \right], \end{aligned}$$

où  $\mu = G(M_c + M)$ ,  $M_c$  et  $M$  sont respectivement la masse du corps central et du satellite,  $R_c$  est le rayon équatorial du corps central et

$$\begin{aligned}\gamma_1^{(0)} &= \frac{1}{2}J_2R_c^2, & \gamma_2^{(0)} &= -\frac{33}{56}J_4R_c^4 - \frac{9}{8}J_2^2R_c^4, & \gamma_1^{(1)} &= \frac{3}{4}J_2R_c^2, \\ \gamma_2^{(1)} &= -\frac{165}{56}J_4R_c^4, & \gamma_1^{(2)} &= 0, & \gamma_2^{(2)} &= -\frac{99}{32}J_4R_c^4, \\ \gamma_1^{(3)} &= -\frac{3}{4}J_2R_c^2, & \gamma_2^{(3)} &= \frac{165}{56}J_4R_c^4 + \frac{45}{16}J_2^2R_c^4, & \gamma_1^{(4)} &= 0, \\ \gamma_2^{(4)} &= -\frac{165}{64}J_4R_c^4 - \frac{57}{32}J_2^2R_c^4, & \gamma_1^{(5)} &= -\frac{9}{8}J_2R_c^2, \\ \gamma_2^{(5)} &= \frac{825}{56}J_4R_c^4 - \frac{3}{8}J_2^2R_c^4, & \gamma_1^{(6)} &= 0 \text{ et } \gamma_2^{(6)} &= -\frac{495}{224}J_4R_c^4.\end{aligned}$$

L'expression additionnelle séculaire provenant du  $C_{2,2}^2$  est décrite par De Saedeleer et Henrard (2006) :

$$\begin{aligned}\langle R_{C22} \rangle &= \frac{3n^2 C_{2,2}^2 R_c^4}{64a^2(1-e^2)^{7/2}} \left[ 8(-22 + 48c^2 - 10c^4) + 2e^2(-27 + 78c^2 + 5c^4) \right. \\ &\quad - 72\sqrt{1-e^2}s^4(\cos(4h) + 1) + 10(e^2 - 8)s^4\cos(4h) \\ &\quad - 12e^2s^2(3 - 5c^2)\cos(2g) + 30e^2s^2(1+c)^2\cos(2g+4h) \\ &\quad \left. + 30e^2s^2(1-c)^2\cos(2g-4h) \right],\end{aligned}$$

où  $l, g, h, L, G$  et  $H$  sont les éléments canoniques classiques de Delaunay,  $n = \mu^2/L^3$ ,  $s = \sin i$  et  $c = \cos i$ .

Finalement, la perturbation du Soleil est basée sur le développement analytique de Brumberg *et al.* (1971) :

$$\begin{aligned}R_\odot &= GM_\odot \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2 - \delta_{j,0}) \frac{(1)_{k-j}}{(1)_{k+j}} \frac{a^k}{R_\odot^{k+1}} P_{kj}(\sin \beta_\odot) F_{kjl}(i) \\ &\quad \times X_{k-2l+q}^{k,k-2l}(e) \cos \left[ (k-2l+q)M + (k-2l)\omega + j(\Omega - \lambda_\odot) - \nabla_{kj} \frac{\pi}{2} \right],\end{aligned}$$

où  $M_\odot$ ,  $R_\odot$ ,  $\beta_\odot$  et  $\lambda_\odot$  sont respectivement la masse, le rayon équatorial moyen, la latitude et la longitude du Soleil, les  $X_k^{n,m}(e)$  sont les coefficients de Hansen,

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1), \quad \nabla_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k-j \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k-j \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}F_{kjl}(i) &= \lambda_{kjl} \left( \sin \frac{i}{2} \right)^{|k-j-2l|} \left( \cos \frac{i}{2} \right)^{|k+j-2l|} F \left( \frac{1}{2}|k-j-2l| + \frac{1}{2}|k+j-2l| - k, \right. \\ &\quad \left. 1 + k + \frac{1}{2}|k-j-2l| + \frac{1}{2}|k+j-2l|, 1 + |k-j-2l|; \sin^2 \left( \frac{i}{2} \right) \right).\end{aligned}$$

où  $F$  est la fonction hypergéométrique et :

$$\lambda_{kjl} = (-1)^{((k-j)/2) + \max\{0, -k+j+2l\}} \frac{(1)_{k+j}}{2^k (1)_l (1)_{k-l}} \\ \times \frac{(1+k+j)_{\max\{0, k-j-2l\}} (1+k-j)_{\max\{0, -k+j+2l\}}}{(1)_{|k-j-2l|}}.$$



# Bibliographie

- ASTAKHOV, S. A., BURBANKS, A. D., WIGGINS, S. et FARRELLY, D. (2003). Chaos-assisted capture of irregular moons. *Nature*, 423:264–267.
- ASTAKHOV, S. A. et FARRELLY, D. (2004). Capture and escape in the elliptic restricted three-body problem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354:971–979.
- ASTAKHOV, S. A., LEE, E. A. et FARRELLY, D. (2005). Formation of Kuiper-belt binaries through multiple chaotic scattering encounters with low-mass intruders. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 360:401–415.
- BARTCZAK, P. et BREITER, S. (2003). Double Material Segment as the Model of Irregular Bodies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 86:131–141.
- BARTCZAK, P., BREITER, S. et JUSIEL, P. (2006). Ellipsoids, material points and material segments. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 96: 31–48.
- BAZSÓ, Á., DVORAK, R., PILAT-LOHINGER, E., EYBL, V. et LHOTKA, C. (2010). A survey of near-mean-motion resonances between Venus and Earth. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 107:63–76.
- BELTON, M. J. S., MUELLER, B. E. A., D’AMARIO, L. A., BYRNES, D. V., KLAASEN, K. P., SYNNOTT, S., BRENNEMAN, H., JOHNSON, T. V., THOMAS, P. C., VEVERKA, J., HARCH, A. P., DAVIES, M. E., MERLINE, W. J., CHAPMAN, C. R., DAVIS, D., DENK, T., NEUKUM, G., PETIT, J.-M., GREENBERG, R., STORRS, A. et ZELLNER, B. (1996). The Discovery and Orbit of 1993 (243)1 Dactyl. *Icarus*, 120:185–199.
- BENETTIN, G., GALGANI, L., GIORGILLI, A. et STRELCOYN, J.-M. (1980). Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 1 : theory. *Meccanica*, pages 9–20.

- BENNER, L. A. M., OSTRO, S. J., GIORGINI, J. D., JURGENS, R. F., MARGOT, J. L. et NOLAN, M. C. (2001). 1999 KW4. *IAU Circ.*, 7632:1.
- BORDERIES, N. (1978). Mutual gravitational potential of N solid bodies. *Celestial Mechanics*, 18:295–307.
- BOUÉ, G. et LASKAR, J. (2009). Spin axis evolution of two interacting bodies. *Icarus*, 201:750–767.
- BOYCE, W. (1997). Comment on a Formula for the Gravitational Harmonic Coefficients of a Triaxial Ellipsoid. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 67:107–110.
- BREITER, S. (2000). The Prograde C7 Resonance for Earth and Mars Satellite Orbits. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 77:201–214.
- BREITER, S., WYTRZYSZCZAK, I. et MELENDO, B. (2005). Long-term predictability of orbits around the geosynchronous altitude. *Advances in Space Research*, 35:1313–1317.
- BROUWER, D. et CLEMENCE, G. M. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. New York, Academic Press.
- BRUMBERG, V. A., EVDOKIMOVA, L. S. et KOCHINA, N. G. (1971). Analytical methods for the orbits of artificial satellites of the moon. *Celestial Mechanics*, 3:197–221.
- CHANDRASEKHAR, S. (1969). *Ellipsoidal figures of equilibrium*. The Silliman Foundation Lectures, New Haven : Yale University Press.
- CHAUVINEAU, B., FARINELLA, P. et MIGNARD, F. (1993). Planar orbits about a triaxial body - Application to asteroidal satellites. *Icarus*, 105:370.
- CHAUVINEAU, B. et MIGNARD, F. (1990a). Dynamics of binary asteroids. I - Hill's case. *Icarus*, 83:360–381.
- CHAUVINEAU, B. et MIGNARD, F. (1990b). Dynamics of binary asteroids. II - Jovian perturbations. *Icarus*, 87:377–390.
- CINCOTTA, P. M. et SIMÓ, C. (2000). Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials - I. *Astronomy & Astrophysics, Supplement*, 147:205–228.
- COMPÈRE, A., FARRELLY, D., LEMAÎTRE, A. et HESTROFFER, D. (2013). A possible mechanism to explain the lack of binary asteroids among the Plutinos. *Astronomy & Astrophysics*, 558:A4.
- COMPÈRE, A. et LEMAÎTRE (2013). The two-body interaction potential in the STF tensor formalism : an application to binary asteroids. *Submitted in Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy special issue*.

- COMPÈRE, A., LEMAÎTRE, A. et DELSATE, N. (2012). Detection by MEGNO of the gravitational resonances between a rotating ellipsoid and a point mass satellite. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112:75–98.
- COURANT, R. et HILBERT, D. (1953). *Methods of mathematical physics - Vol.1 ; Vol.2*. New York : Interscience Publication.
- ČUK, M. et BURNS, J. A. (2005). Effects of thermal radiation on the dynamics of binary NEAs. *Icarus*, 176:418–431.
- ČUK, M. et NESVORNÝ, D. (2010). Orbital evolution of small binary asteroids. *Icarus*, 207:732–743.
- CUNNINGHAM, L. (1970). On the computation of the spherical harmonics terms needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. *Celestial Mechanics*, 2:207–216.
- DE SAEDELEER, B. et HENRARD, J. (2006). The combined effect of  $J_2$  and  $C_{22}$  on the critical inclination of a lunar orbiter. *Advances in Space Research*, 37:80–87.
- DELSATE, N. (2011). Analytical and numerical study of the ground-track resonances of Dawn orbiting Vesta. *Planetary and Space Science*, 59:1372–1383.
- DELSATE, N. (2011). *Modélisation et analyse de la dynamique orbitale : équilibre, résonance et chaos*. Thèse de doctorat, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix Namur.
- DELSATE, N. et COMPÈRE, A. (2012). NIMASTEP : a software to modelize, study, and analyze the dynamics of various small objects orbiting specific bodies. *Astronomy & Astrophysics*, 540:A120.
- DELSATE, N., ROBUTEL, P., LEMAÎTRE, A. et CARLETTI, T. (2010). Frozen orbits at high eccentricity and inclination : application to Mercury orbiter. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 108:275–300.
- DESCAMPS, P., MARCHIS, F., BERTHIER, J., EMERY, J. P., DUCHÊNE, G., DE PATER, I., WONG, M. H., LIM, L., HAMMEL, H. B., VACHIER, F., WIGGINS, P., TENG-CHUEN-YU, J.-P., PEYROT, A., POLLOCK, J., ASSAFIN, M., VIEIRA-MARTINS, R., CAMARGO, J. I. B., BRAGA-RIBAS, F. et MACOMBER, B. (2011). Triplicity and physical characteristics of Asteroid (216) Kleopatra. *Icarus*, 211:1022–1033.
- DESCAMPS, P., MARCHIS, F., DURECH, J., EMERY, J., HARRIS, A. W., KAA-SALAINEN, M., BERTHIER, J., TENG-CHUEN-YU, J.-P., PEYROT, A., HUTTON, L., GREENE, J., POLLOCK, J., ASSAFIN, M., VIEIRA-MARTINS, R., CAMARGO, J. I. B., BRAGA-RIBAS, F., VACHIER, F., REICHAERT, D. E., IVARSEN, K. M., CRAIN, J. A., NYSEWANDER, M. C., LACLUYZE, A. P., HAISLIP, J. B., BEHREND, R., COLAS, F., LECACHEUX, J., BERNASCONI, L., ROY, R.,



- BAUDOUIN, P., BRUNETTO, L., SPOSETTI, S. et MANZINI, F. (2009). New insights on the binary Asteroid 121 Hermione. *Icarus*, 203:88–101.
- DESCAMPS, P., MARCHIS, F., POLLOCK, J., BERTHIER, J., VACHIER, F., BIRLAN, M., KAASALAINEN, M., HARRIS, A. W., WONG, M. H., ROMANISHIN, W. J., COOPER, E. M., KETTNER, K. A., WIGGINS, P., KRYSZCZYNSKA, A., POLINSKA, M., COLIAC, J.-F., DEVYATKIN, A., VERESTCHAGINA, I. et GORSHANOV, D. (2008). New determination of the size and bulk density of the binary Asteroid 22 Kalliope from observations of mutual eclipses. *Icarus*, 196:578–600.
- DOMINGOS, R. C., WINTER, O. C. et YOKOYAMA, T. (2006). Stable satellites around extrasolar giant planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 373:1227–1234.
- DRUMMOND, J. et CHRISTOU, J. (2008). Triaxial ellipsoid dimensions and rotational poles of seven asteroids from Lick Observatory adaptive optics images, and of Ceres. *Icarus*, 197:480–496.
- DUBOSHIN, G. N. (1959). On One Particular Case of the Problem of the Translational-Rotational Motion of Two Bodies. *Soviet Astronomy*, 3:154.
- DURDA, D. D., BOTTKÉ, W. F., ENKE, B. L., MERLINE, W. J., ASPHAUG, E., RICHARDSON, D. C. et LEINHARDT, Z. M. (2004). The formation of asteroid satellites in large impacts : results from numerical simulations. *Icarus*, 170: 243–257.
- DURECH, J., SIDORIN, V. et KAASALAINEN, M. (2010). DAMIT : a database of asteroid models. *Astronomy & Astrophysics*, 513:A46.
- EFROIMSKY, M. et WILLIAMS, J. G. (2009). Tidal torques : a critical review of some techniques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:257–289.
- ELIPE, A. et LARA, M. (2006). A simple model to determine chaotic motions around asteroids. In ABAD, C., BONGIOVANNI, A. et GUILLEN, Y., éditeurs : *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, volume 25 de *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, pages 3–6.
- FAHNESTOCK, E. G. et SCHEERES, D. J. (2008). Simulation and analysis of the dynamics of binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4. *Icarus*, 194:410–435.
- FANG, J., MARGOT, J.-L. et ROJO, P. (2012). Orbits, Masses, and Evolution of Main Belt Triple (87) Sylvia. *The Astronomical Journal*, 144:70.

- FARRELLY, D., HESTROFFER, D., ASTAKHOV, S. A., LEE, E. A., BERTHIER, J., VACHIER, F., MERLIN, F., DORESSOUDIRAM, A. et MARCHIS, F. (2006). Orbital and Physical Characterization of Centaur and TNO Binaries. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #38*, volume 38 de *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 1300.
- FERRAZ-MELLO, S., RODRÍGUEZ, A. et HUSSMANN, H. (2008). Tidal friction in close-in satellites and exoplanets : The Darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101:171–201.
- FROUARD, J. et COMPÈRE, A. (2012). Instability zones for satellites of asteroids : The example of the (87) Sylvia system. *Icarus*, 220:149–161.
- FROUARD, J., FOUCHARD, M. et VIENNE, A. (2010). About the dynamics of the evection resonance. *Astronomy & Astrophysics*, 515:A54.
- FUNATO, Y., MAKINO, J., HUT, P., KOKUBO, E. et KINOSHITA, D. (2004). The formation of Kuiper-belt binaries through exchange reactions. *Nature*, 427:518–520.
- GAMBOA SUÁREZ, A., HESTROFFER, D. et FARRELLY, D. (2010). Formation of the extreme Kuiper-belt binary 2001 QW<sub>322</sub> through adiabatic switching of orbital elements. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 106:245–259.
- GARMIER, R., BARRIOT, J., KONOPLIV, A. K. et YEOMANS, D. (2001). The Ellipsoidal Harmonic Expansion of the Gravity Field of Asteroid Eros 433 Estimated From the NEAR Doppler Tracking Data. *AGU Fall Meeting Abstracts*, page B551.
- GELFAND, I., MINLOS, R. et SHAPIRO, Z. (1963). *Representation of the Rotation of the Lorentz groups*. Oxford : Pergamon.
- GIBLIN, I., PETIT, J. et FARINELLA, P. (1998). Impact Ejecta Rotational Bursting as a Mechanism for Producing Stable Ida-Dactyl Systems. *Icarus*, 132:43–52.
- GOLDREICH, P. (1963). On the eccentricity of satellite orbits in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 126:257.
- GOLDREICH, P., LITHWICK, Y. et SARI, R. (2002). Formation of Kuiper-belt binaries by dynamical friction and three-body encounters. *Nature*, 420:643–646.
- GOLDREICH, P., LITHWICK, Y. et SARI, R. (2004). Planet Formation by Coagulation : A Focus on Uranus and Neptune. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, 42:549–601.
- GOLDREICH, P. et SARI, R. (2009). Tidal Evolution of Rubble Piles. *Astronomy & Astrophysics*, 691:54–60.

- GOLDREICH, P. et SOTER, S. (1966). Q in the Solar System. *Icarus*, 5:375–389.
- GOMES, R., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K. et MORBIDELLI, A. (2005). Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435:466–469.
- GOMES, R. S. (2003). The origin of the Kuiper Belt high-inclination population. *Icarus*, 161:404–418.
- GOŹDZIEWSKI, K., BOIS, E., MACIEJEWSKI, A. J. et KISELEVA-EGGLETON, L. (2001). Global dynamics of planetary systems with the MEGNO criterion. *Astronomy & Astrophysics*, 378:569–586.
- GOŹDZIEWSKI, K., BREITER, S. et BORCZYK, W. (2008a). The long-term stability of extrasolar system HD37124. Numerical study of resonance effects. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383:989–999.
- GOŹDZIEWSKI, K., MIGASZEWSKI, C. et KONACKI, M. (2008b). A dynamical analysis of the 14 Herculis planetary system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385:957–966.
- GRUNDY, W. M., NOLL, K. S., NIMMO, F., ROE, H. G., BUIE, M. W., PORTER, S. B., BENECHCHI, S. D., STEPHENS, D. C., LEVISON, H. F. et STANSBERRY, J. A. (2011). Five new and three improved mutual orbits of transneptunian binaries. *Icarus*, 213:678–692.
- HAHN, J. M. et MALHOTRA, R. (2005). Neptune’s Migration into a Stirred-Up Kuiper Belt : A Detailed Comparison of Simulations to Observations. *The Astronomical Journal*, 130:2392–2414.
- HAIRER, E., NØRSETT, S. et WANNER, G. (2008). *Solving Ordinary Differential Equations I : Nonstiff Problems*. Second Edition, Springer Series in Computational Mathematics.
- HARTMANN, T., SOFFEL, M. H. et KIOUSTELIDIS, T. (1994). On the use of STF-tensors in celestial mechanics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60:139–159.
- IVORY (1809). On the attraction of homogeneous ellipsoids. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 99:345–372.
- JACOBSON, S. A. et SCHEERES, D. J. (2011). Long-term Stable Equilibria for Synchronous Binary Asteroids. *The Astrophysical Journal Letters*, 736:L19.
- KAASALAINEN, M., TORPPA, J. et PIIRONEN, J. (2002). Models of Twenty Asteroids from Photometric Data. *Icarus*, 159:369–395.
- KAULA, W. M. (1966). *Theory of satellite geodesy. Applications of satellites to geodesy*. Waltham, Mass. : Blaisdell.

- KLINKRAD, H. (2006). *Space debris. Models and risk analysis*. Praxis Publishing Ltd, Chichester, UK.
- KNEŽEVIĆ, Z. et MILANI, A. (2003). Proper element catalogs and asteroid families. *Astronomy & Astrophysics*, 403:1165–1173.
- KOMINAMI, J. D., MAKINO, J. et DAISAKA, H. (2011). Binary Formation in Planetesimal Disks. I. Equal Mass Planetesimals. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 63:1331–1344.
- LASKAR, J. (1990). The chaotic motion of the solar system - A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88:266–291.
- LASKAR, J. (1993). Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 67:257–281.
- LASKAR, J. (1999). Introduction to frequency map analysis. In *Proceedings of 3DHAM95 NATO Advanced Institute*, volume 533, pages 134–150.
- LEE, E. A., ASTAKHOV, S. A. et FARRELLY, D. (2007). Production of trans-Neptunian binaries through chaos-assisted capture. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 379:229–246.
- LEVISON, H. F. et MORBIDELLI, A. (2003). The formation of the Kuiper belt by the outward transport of bodies during Neptune’s migration. *Nature*, 426:419–421.
- LEVISON, H. F., MORBIDELLI, A., VAN LAERHOVEN, C., GOMES, R. et TSIGANIS, K. (2008). Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune. *Icarus*, 196:258–273.
- MAC MILLAN, W. D. (1958). *The Theory of Potential*. Dover publications.
- MACIEJEWSKI, A. J. (1995). Reduction, Relative Equilibria and Potential in the Two Rigid Bodies Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 63:1–28.
- MAFFIONE, N. P., DARRIBA, L. A., CINCOTTA, P. M. et GIORDANO, C. M. (2011). A comparison of different indicators of chaos based on the deviation vectors : application to symplectic mappings. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 111:285–307.
- MALHOTRA, R. (1995). The Origin of Pluto’s Orbit : Implications for the Solar System Beyond Neptune. *The Astronomical Journal*, 110:420.
- MALHOTRA, R., DUNCAN, M. J. et LEVISON, H. F. (2000). Dynamics of the Kuiper Belt. *Protostars and Planets IV*, page 1231.
- MARCHIS, F., BERTHIER, J., DESCAMPS, P., HESTROFFER, D. et F., V. (2005a). 103 camilla and s/2001 (103) 1, univ. of california-berkeley astronomy dept.

- MARCHIS, F., DESCAMPS, P., BAEK, M., HARRIS, A. W., KAASALAINEN, M., BERTHIER, J., HESTROFFER, D. et VACHIER, F. (2008a). Main belt binary asteroidal systems with circular mutual orbits. *Icarus*, 196:97–118.
- MARCHIS, F., DESCAMPS, P., BERTHIER, J., HESTROFFER, D., VACHIER, F., BAEK, M., HARRIS, A. W. et NESVORNÝ, D. (2008b). Main belt binary asteroidal systems with eccentric mutual orbits. *Icarus*, 195:295–316.
- MARCHIS, F., DESCAMPS, P., DALBA, P., ENRIQUEZ, J. E., DURECH, J., EMERY, J. P., BERTHIER, J., VACHIER, F., MERLBORNE, J., STOCKTON, A. N., FASSNACHT, C. D. et DUPUY, T. J. (2011). A Detailed Picture of the (93) Minerva Triple System. In *EPSC-DPS Joint Meeting 2011*, page 653.
- MARCHIS, F., DESCAMPS, P., HESTROFFER, D. et BERTHIER, J. (2005b). Discovery of the triple asteroidal system 87 Sylvia. *Nature*, 436:822–824.
- MARCHIS, F., HESTROFFER, D., DESCAMPS, P., BERTHIER, J., LAVER, C. et DE PATER, I. (2005c). Mass and density of Asteroid 121 Hermione from an analysis of its companion orbit. *Icarus*, 178:450–464.
- MARCHIS, F., KAASALAINEN, M., HOM, E. F. Y., BERTHIER, J., ENRIQUEZ, J., HESTROFFER, D., LE MIGNANT, D. et DE PATER, I. (2006). Shape, size and multiplicity of main-belt asteroids. I. Keck Adaptive Optics survey. *Icarus*, 185:39–63.
- MARCHIS, F., LAINEY, V., DESCAMPS, P., BERTHIER, J., VAN DAM, M., DE PATER, I., MACOMBER, B., BAEK, M., LE MIGNANT, D., HAMMEL, H. B., SHOWALTER, M. et VACHIER, F. (2010). A dynamical solution of the triple asteroid system (45) Eugenia. *Icarus*, 210:635–643.
- MARGOT, J. L., NOLAN, M. C., BENNER, L. A. M., OSTRO, S. J., JURGENS, R. F., GIORGINI, J. D., SLADE, M. A. et CAMPBELL, D. B. (2002). Binary Asteroids in the Near-Earth Object Population. *Science*, 296:1445–1448.
- MATHIS, S. et LE PONCIN-LAFITTE, C. (2009). Tidal dynamics of extended bodies in planetary systems and multiple stars. *Astronomy & Astrophysics*, 497:889–910.
- MCMAHON, J. et SCHEERES, D. (2010). Detailed prediction for the BYORP effect on binary near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4 and implications for the binary population. *Icarus*, 209:494–509.
- MESTRE, M. F., CINCOTTA, P. M. et GIORDANO, C. M. (2011). Analytical relation between two chaos indicators : FLI and MEGNO. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 414:L100–L103.
- MILANI, A. et KNEŽEVIĆ, Z. (1998). Asteroid Mean Elements : Higher Order and Iterative Theories. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 71: 55–78.

- MONTENBRUCK, O. et EBERHARD, G. (2000). *Satellite orbits : models, methods, and applications*. Berlin : Springer-Verlag.
- MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K. et GOMES, R. (2005). Chaotic capture of Jupiter's Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435:462–465.
- MURRAY, C. D. et DERMOTT, S. F. (2000). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
- MURRAY-CLAY, R. A. et SCHLICHTING, H. E. (2011). Using Kuiper Belt Binaries to Constrain Neptune's Migration History. *The Astrophysical Journal*, 730:132.
- MYSEN, E. et AKSNES, K. (2007). On the dynamical stability of the Rosetta orbiter. II. *Astronomy & Astrophysics*, 470:1193–1199.
- MYSEN, E., OLSEN, Ø. et AKSNES, K. (2006). Chaotic gravitational zones around a regularly shaped complex rotating body. *Planetary And Space Science*, 54:750–760.
- NESVORNÝ, D. et VOKROUHLICKÝ, D. (2007). Analytic Theory of the YORP Effect for Near-Spherical Objects. *The Astronomical Journal*, 134:1750.
- NESVORNÝ, D., YODIN, A. N. et RICHARDSON, D. C. (2010). Formation of Kuiper Belt Binaries by Gravitational Collapse. *The Astronomical Journal*, 140:785–793.
- NOLL, K. S. (2003). Transneptunian Binaries. *Earth Moon and Planets*, 92:395–407.
- NOLL, K. S., GRUNDY, W. M., CHIANG, E. I., MARGOT, J.-L. et KERN, S. D. (2008). *Binaries in the Kuiper Belt, in The Solar System Beyond Neptune*, pages 345–363.
- NOLL, K. S., STEPHENS, D. C., GRUNDY, W. M. et GRIFFIN, I. (2004). The orbit, mass, and albedo of transneptunian binary (66652) 1999 RZ<sub>253</sub>. *Icarus*, 172:402–407.
- OSTRO, S. J., MARGOT, J.-L., BENNER, L. A. M., GIORGINI, J. D., SCHEERES, D. J., FAHNESTOCK, E. G., BROSCART, S. B., BELLEROSE, J., NOLAN, M. C., MAGRI, C., PRAVEC, P., SCHEIRICH, P., ROSE, R., JURGENS, R. F., DE JONG, E. M. et SUZUKI, S. (2006). Radar Imaging of Binary Near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW<sub>4</sub>. *Science*, 314:1276–1280.
- PARKER, A. H. et KAVELAARS, J. J. (2010). Destruction of Binary Minor Planets During Neptune Scattering. *The Astrophysical Journal Letters*, 722:L204–L208.

- PETIT, J. et LEMAITRE, A. (1997). Resonances and Capture Probability in the Ida/Dactyl System. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 29 de *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 972–+.
- PETIT, J.-M., DURDA, D. D., GREENBERG, R., HURFORD, T. A. et GEISSLER, P. E. (1997). The Long-Term Dynamics of Dactyl's Orbit. *Icarus*, 130:177–197.
- PRAVEC, P. et HARRIS, A. W. (2007). Binary asteroid population. 1. Angular momentum content. *Icarus*, 190:250–259.
- PRAVEC, P. et SAROUNOVA, L. (2001). 1999 KW4. *IAU Circ.*, 7633:2.
- PRAVEC, P., SCHEIRICH, P., KUŠNIRÁK, P., ŠAROUNOVÁ, L., MOTTOLA, S., HAHN, G., BROWN, P., ESQUERDO, G., KAISER, N., KRZEMINSKI, Z., PRAY, D. P., WARNER, B. D., HARRIS, A. W., NOLAN, M. C., HOWELL, E. S., BENNER, L. A. M., MARGOT, J.-L., GALÁD, A., HOLLIDAY, W., HICKS, M. D., KRUGLY, Y. N., THOLEN, D., WHITELEY, R., MARCHIS, F., DEGRAFF, D. R., GRAUER, A., LARSON, S., VELICHKO, F. P., COONEY, W. R., STEPHENS, R., ZHU, J., KIRSCH, K., DYVIG, R., SNYDER, L., REDDY, V., MOORE, S., GAJDOŠ, Š., VILÁGI, J., MASI, G., HIGGINS, D., FUNKHOUSER, G., KNIGHT, B., SLIVAN, S., BEHREND, R., GRENON, M., BURKI, G., ROY, R., DEMEAUTIS, C., MATTER, D., WAECHLI, N., REVAZ, Y., KLOTZ, A., RIEUGNÉ, M., THIERRY, P., COTREZ, V., BRUNETTO, L. et KOBER, G. (2006). Photometric survey of binary near-Earth asteroids. *Icarus*, 181:63–93.
- PRAVEC, P., SCHEIRICH, P., VOKROUHLICKÝ, D., HARRIS, A. W., KUŠNIRÁK, P., HORNOCH, K., PRAY, D. P., HIGGINS, D., GALÁD, A., VILÁGI, J., GAJDOŠ, Š., KORNOŠ, L., OEY, J., HUSÁRIK, M., COONEY, W. R., GROSS, J., TERRELL, D., DURKEE, R., POLLOCK, J., REICHART, D. E., IVARSEN, K., HAISLIP, J., LACLUYZE, A., KRUGLY, Y. N., GAFTONYUK, N., STEPHENS, R. D., DYVIG, R., REDDY, V., CHIORNY, V., VADUVESCU, O., LONGA-PÉÑA, P., TUDORICA, A., WARNER, B. D., MASI, G., BRINSFIELD, J., GONÇALVES, R., BROWN, P., KRZEMINSKI, Z., GERASHCHENKO, O., SHEVCHENKO, V., MOLOTOV, I. et MARCHIS, F. (2012). Binary asteroid population. 2. Anisotropic distribution of orbit poles of small, inner main-belt binaries. *Icarus*, 218:125–143.
- RABINOWITZ, D. L., BARKUME, K., BROWN, M. E., ROE, H., SCHWARTZ, M., TOURELLOTTE, S. et TRUJILLO, C. (2006). Photometric Observations Constraining the Size, Shape, and Albedo of 2003 EL61, a Rapidly Rotating, Pluto-sized Object in the Kuiper Belt. *Astronomy & Astrophysics*, 639:1238–1251.
- RAGOZZINE, D. et BROWN, M. E. (2009). Orbits and Masses of the Satellites of the Dwarf Planet Haumea (2003 EL61). *The Astronomical Journal*, 137:4766–4776.

- ROSSI, A., MARZARI, F. et FARINELLA, P. (1999). Orbital evolution around irregular bodies. *Earth, Planets, and Space*, 51:1173–1180.
- ROSSI, A., MARZARI, F. et SCHEERES, D. J. (2009). Computing the effects of YORP on the spin rate distribution of the NEO population. *Icarus*, 202:95–103.
- RUBINCAM, D. P. (2000). Radiative Spin-up and Spin-down of Small Asteroids. *Icarus*, 148:2–11.
- SCHEERES, D. J. (1994). Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids : Applications to asteroids. *Icarus*, 110:225–238.
- SCHEERES, D. J. (2002a). Stability in the Full Two-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 83:155–169.
- SCHEERES, D. J. (2002b). Stability of Binary Asteroids. *Icarus*, 159:271–283.
- SCHEERES, D. J. (2006). Relative Equilibria for General Gravity Fields in the Sphere-Restricted Full 2-Body Problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94:317–349.
- SCHEERES, D. J., FAHNESTOCK, E. G., OSTRO, S. J., MARGOT, J.-L., BENNER, L. A. M., BROSCART, S. B., BELLEROSE, J., GIORGINI, J. D., NOLAN, M. C., MAGRI, C., PRAVEC, P., SCHEIRICH, P., ROSE, R., JURGENS, R. F., DE JONG, E. M. et SUZUKI, S. (2006). Dynamical Configuration of Binary Near-Earth Asteroid (66391) 1999 KW4. *Science*, 314:1280–1283.
- SCHEERES, D. J., OSTRO, S. J., HUDSON, R. S. et WERNER, R. A. (1996). Orbits Close to Asteroid 4769 Castalia. *Icarus*, 121:67–87.
- SCHEERES D. J., Williams B. G., M. J. K. (2000). Evaluation of the Dynamic Environment of an asteroid : Applications to 433 Eros. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 23:466–475.
- SHEPPARD, S. S., RAGOZINE, D. et TRUJILLO, C. (2012). 2007 TY430 : A cold classical Kuiper belt binary in the plutino population. *Astronomical Journal*, 143:58.
- STEINBERG, E. et SARI, R. (2011). Binary YORP Effect and Evolution of Binary Asteroids. *The Astronomical Journal*, 141:55.
- TAYLOR, P. A. et MARGOT, J.-L. (2010). Tidal evolution of close binary asteroid systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 108:315–338.
- TAYLOR, P. A. et MARGOT, J.-L. (2011). Binary asteroid systems : Tidal end states and estimates of material properties. *Icarus*, 212:661–676.
- THORNE, K. S. (1980). Multipole expansions of gravitational radiation. *Reviews of Modern Physics*, 52:299–340.



- TORPPA, J., KAASALAINEN, M., MICHALOWSKI, T., KWIATKOWSKI, T., KRYSZCZYŃSKA, A., DENCHEV, P. et KOWALSKI, R. (2003). Shapes and rotational properties of thirty asteroids from photometric data. *Icarus*, 164:346–383.
- TOUMA, J. et WISDOM, J. (1998). Resonances in the Early Evolution of the Earth-Moon System. *The Astronomical Journal*, 115:1653–1663.
- TSIGANIS, K., GOMES, R., MORBIDELLI, A. et LEVISON, H. F. (2005). Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435:459–461.
- VALK, S., DELSATE, N., LEMAÎTRE, A. et CARLETTI, T. (2009). Global dynamics of high area-to-mass ratios GEO space debris by means of the MEGNO indicator. *Advances in Space Research*, 43:1509–1526.
- VASILKOVA, O. (2005). Three-dimensional periodic motion in the vicinity of the equilibrium points of an asteroid. *Astronomy & Astrophysics*, 430:713–723.
- VASILKOVA, O. (2006). *Generation of chaos about a fast rotating and strongly elongated body, in Few-Body Problem : Theory and Computer Simulations*, page 106. University of Turku.
- VASILKOVA, O. (2008). Global dynamics of planar orbits in close vicinity of an asteroid. In *Proceedings of the workshop "Mutual events of the Uranian satellites", Paris, 15-18 Nov. 2006*, pages 49–52.
- VEILLET, C., PARKER, J. W., GRIFFIN, I., MARSDEN, B., DORESSOONDIRAM, A., BUIE, M., THOLEN, D. J., CONNELLEY, M. et HOLMAN, M. J. (2002). The binary Kuiper-belt object 1998 WW31. *Nature*, 416:711–713.
- VERAS, D. (2007). A resonant-term-based model including a nascent disk, precession, and oblateness : application to GJ 876. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 99:197–243.
- VERHEYLEWEGEN, E., NOYELLES, B. et LEMAITRE, A. (2013). A numerical exploration of Miranda's dynamical history. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435:1776–1787.
- VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D. et BOTTKE, W. F. (2003). The vector alignments of asteroid spins by thermal torques. *Nature*, 425:147–151.
- VOKROUHLICKÝ, D., NESVORNÝ, D., BOTTKE, W. F. et MORBIDELLI, A. (2010). Collisionally Born Family About 87 Sylvia. *The Astronomical Journal*, 139:2148–2158.
- WEIDENSCHILLING, S. J. (2002). On the Origin of Binary Transneptunian Objects. *Icarus*, 160:212–215.

- WERNER, R. A. (1994). The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 59:253–278.
- WHIPPLE, A. L. et SZEBEHELY, V. (1984). The restricted problem of  $N + V$  bodies. *Celestial Mechanics*, 32:137–144.
- WHIPPLE, A. L. et WHITE, L. K. (1985). Stability of binary asteroids. *Celestial Mechanics*, 35:95–104.
- WIGNER, E. P. (1959). *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press.
- WINTER, O. C., BOLDRIN, L. A. G., VIEIRA NETO, E., VIEIRA MARTINS, R., GIULIATTI WINTER, S. M., GOMES, R. S., MARCHIS, F. et DESCAMPS, P. (2009). On the stability of the satellites of asteroid 87 Sylvia. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 395:218–227.
- YOKOYAMA, T., VIEIRA NETO, E., WINTER, O., SANCHEZ, D. et DE OLIVEIRA BRASIL, P. (2008). On the Evection Resonance and Its Connection to the Stability of Outer Satellites. *Mathematical Problems in Engineering*.

